重要パターン演習

数学 2年

新訂版

二等辺三角形や三角形の性質等の問題集　中2数学｜重要パターン演習

第５章　三角形の性質

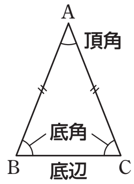
§１．二等辺三角形

Introduction　二等辺三角形の定義と定理，二等辺三角形になるための条件

▶　二等辺三角形の定義

二等辺三角形の定義は，「**２辺が等しい三角形**」である。二等辺三角形で，長さの等しい２辺の間の角を**頂角**，頂角に向かい合う辺を**底辺**，底辺の両端の角を**底角**という。

☞**定義**…その言葉の意味を他と区別できるように明確に述べたもの



▶　二等辺三角形の定理①

「**二等辺三角形の底角は等しい**」という定理がある。小学校でも学習しているが，ここでは，その理由を合同の証明を使って示す。

AB＝AC の二等辺三角形において，∠B＝∠C を示す。

［証明］∠A の二等分線をひき，底辺 BC との交点を D とする。（図 1）

△ABD と△ACD において，

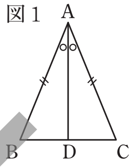
仮定より，AB＝AC…①　　∠BAD＝∠CAD…②

共通なので，AD＝AD…③

①，②，③より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ABD≡△ACD　　よって，∠B＝∠C

図１



☞定理の証明は必ず自分で書けるようにしておくことが大切

▶　二等辺三角形の定理②

「**二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分する**」という重要な定理がある。これを上記の証明を利用して考えてみる。

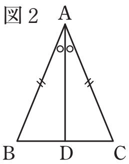
図２で，BD＝CD，AD⊥BC を示す。

［証明］上の証明から△ABD≡△ACD より，BD＝CD，∠ADB＝∠ADC

また，∠ADB＋∠ADC＝180° より，2∠ADB＝180° となり，

∠ADB＝90°　　よって，AD⊥BC

図２



▶　二等辺三角形になるための条件

二等辺三角形の底角は等しいが，その**逆「三角形の２つの角が等しければ，その三角形は二等辺三角形である」**が成り立つことを示しておく。

☞**逆**…仮定と結論を入れかえたもの

△ABC において，∠B＝∠C のとき，AB＝AC を示す。

［証明］図３の△ABD と△ACD において，∠BAD＝∠CAD…①

仮定より，∠B＝∠C

三角形の内角の和は 180° なので，残りの角も等しいから，

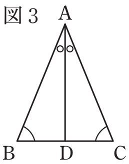
∠ADB＝∠ADC…②

共通なので，AD＝AD…③

①，②，③より，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ABD≡△ACD　　よって，AB＝AC

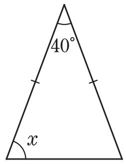
図３

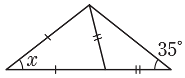


☞三角形が二等辺三角形かどうかを知りたければ，
①**２辺が等しい**
②**２角が等しい**
のどちらかを調べればよいことになる。

例題 107 ＜二等辺三角形と角＞

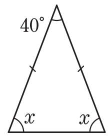
右の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。
ただし，同じ印のついている辺は等しいものとする。

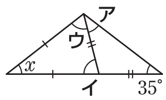
(1)


(2)


解答

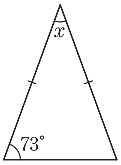
Point **二等辺三角形の底角は等しい。**

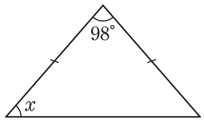


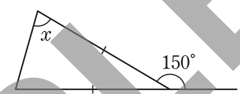


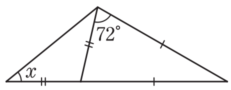
(1)　右の図で底角は等しい。内角の和は 180° だから，
　$\angle x=(180°-40°)\div 2=$ **70°**
(2)　二等辺三角形の底角は等しいので，**ア** $=35°$，
　外角定理より，**イ** $=35°+35°=70°$
　イ $=$ **ウ** $=70°$ より，$\angle x=180°-70°\times 2=$ **40°**

❒ **Ex.113** ❒　次の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし，同じ印のついている辺は等しいものとする。

(1)


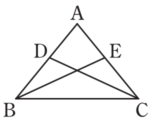
(2)


(3)


(4)


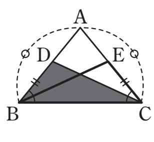
例題 108 ＜二等辺三角形の性質を用いた証明＞

右の図の△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。BD＝CE のとき，
CD＝BE となることを証明しなさい。



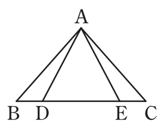
解答

Point **二等辺三角形の定義…2 辺が等しい三角形**
二等辺三角形の定理…1　底角が等しい
2　頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する
△DBC≡△ECB を証明　→　CD＝BE を導く。



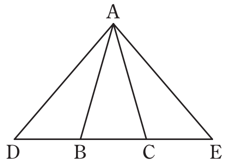
△DBC と△ECB において，
仮定より，BD＝CE…①　　共通なので，BC＝CB…②
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形で，底角が等しいから，
　　∠DBC＝∠ECB…③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
　　△DBC≡△ECB
よって，CD＝BE

❒ **Ex.114** ❒　右の図の△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形である。底辺 BC 上に BD＝CE となる点 D，E をとるとき，AD＝AE となることを証明しなさい。



例題 109 ＜二等辺三角形であることの証明(1)＞

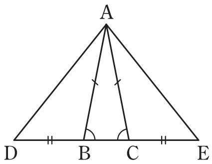
右の図の△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形である。底辺 BC の延長上に BD＝CE となる点 D，E をとるとき，△ADE が二等辺三角形となることを証明しなさい。



解答

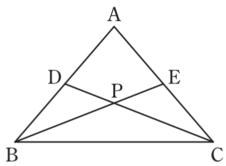
Point　**二等辺三角形であることの証明…1　２辺が等しい（定義）　2　２角が等しい**
△ABD≡△ACE を証明し，AD＝AE(∠ADB＝∠AEC）を示す。

△ABD と△ACE において，
仮定より，AB＝AC…①　　BD＝CE…②
二等辺三角形の底角は等しいので，∠ABC＝∠ACB…③
∠ABD＝180°－∠ABC…④
∠ACE＝180°－∠ACB…⑤
③，④，⑤より，∠ABD＝∠ACE…⑥
①，②，⑥より，２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△ABD≡△ACE
よって，AD＝AE となり，△ADE は二等辺三角形である。



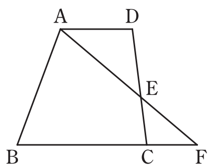
☞△ABD≡△ACE まで証明したあと，「よって，∠ADB＝∠AEC となり，△ADE は２角が等しいので，二等辺三角形である」としてもよい。

❒ **Ex.115** ❒　右の図の二等辺三角形 ABC において，AB，AC の中点をそれぞれ D，E とする。BE と CD の交点を P とするとき，△PBC が二等辺三角形となることを証明しなさい。



例題 110 ＜二等辺三角形であることの証明(2)＞

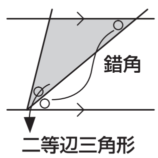
右の図のように，AD//BC の台形 ABCD で，辺 CD 上に AD＝DE となる点 E をとる。AE の延長と BC の延長との交点を F とするとき，△CFE が二等辺三角形になることを証明しなさい。

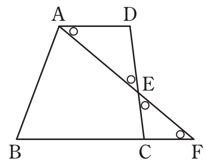


解答

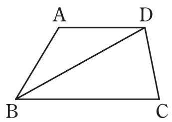
Point　**平行線と角の二等分線…二等辺三角形の発見**

△DAE は DA＝DE の二等辺三角形で，底角が等しいから，
∠DAE＝∠DEA…①
対頂角は等しいので，∠DEA＝∠CEF…②
AD//BC より，錯角は等しいので，∠DAE＝∠CFE…③
①，②，③より，∠CEF＝∠CFE
△CFE は２角が等しいので，二等辺三角形である。



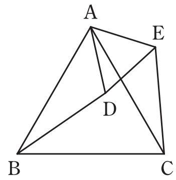


❒ **Ex.116** ❒　右の図の四角形 ABCD で，AD//BC，BD が∠ABC の二等分線のとき，△ABD が二等辺三角形となることを証明しなさい。



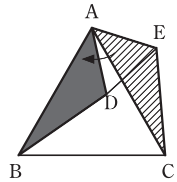
例題 111 ＜正三角形の性質と証明＞

右の図において，△ABC，△ADE は，ともに正三角形である。このとき，CE＝BD となることを証明しなさい。



解答

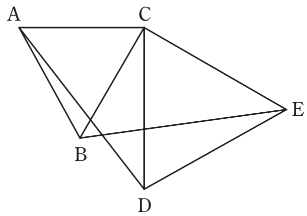
Point **正三角形…（定義）3 辺が等しい**
（定理）3 つの内角が等しい
1 つの頂点を共有する正三角形（正方形）…回転型の合同の発見
△ACE を時計回りに 60° 回転 → △ABD と重なる



☞回転型の合同では，合同条件「2 辺とその間の角がそれぞれ等しい」を使うことが多い。

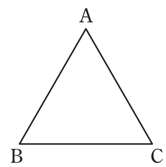
△ACE と△ABD において，
仮定より，AE＝AD…① AC＝AB…②
△ABC，△ADE は正三角形で，3 つの内角がすべて等しいから，
∠DAE＝∠BAC＝60°
よって，∠CAE＝∠DAE－∠DAC＝60°－∠DAC…③ ∠BAD＝∠BAC－∠DAC＝60°－∠DAC…④
③，④より，∠CAE＝∠BAD…⑤
①，②，⑤より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△ACE≡△ABD よって，CE＝BD

❒ **Ex.117** ❒ 右の図の△ABC と△CDE はともに正三角形である。このとき，AD＝BE となることを証明しなさい。



例題 112 ＜正三角形であることの証明＞

△ABC で，3 つの内角が等しいとき，△ABC が正三角形となることを証明しなさい。



解答

Point **正三角形であることの証明…1 3 辺が等しい（定義） 2 3 つの内角が等しい**

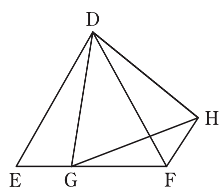
∠ABC＝∠ACB より，△ABC の 2 角が等しいので，AB＝AC…①
同様に，∠BAC＝∠BCA より，BA＝BC…②
①，②より，AB＝BC＝CA よって，△ABC は正三角形である。

☞二等辺三角形の性質を利用

❒ **Ex.118** ❒ 右の図で，△DEF は正三角形で DE//HF，EG＝FH である。このとき，次のことがらを証明しなさい。

(1) △DEG≡△DFH (2) ∠GDH＝60°

(3) △DGH が正三角形

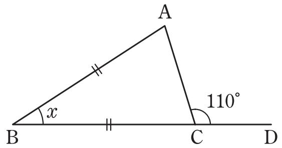


練 習 問 題

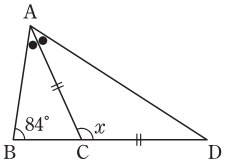
1 次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし，同じ印のついた角や辺は等しいものとする。

例題 107

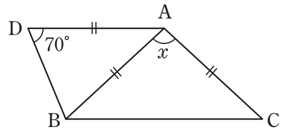
(1)



(2)



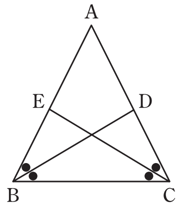
(3)



(AD//BC)

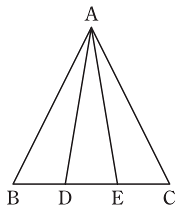
2 右の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC の∠B，∠C の二等分線と辺 AC，AB との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，BD＝CE となることを証明しなさい。

例題 108



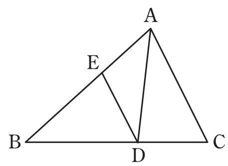
3 右の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC において，底辺 BC 上に，∠BAD＝∠CAE となる点 D，E をとる。このとき，△ADE が二等辺三角形となることを証明しなさい。

例題 109



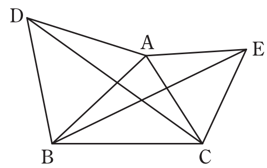
4 右の図のように，△ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D，D を通り辺 AC に平行な直線と辺 AB の交点を E とする。このとき，△EDA が二等辺三角形となることを証明しなさい。

例題 110



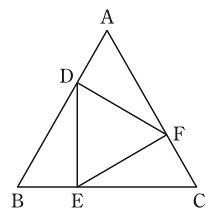
5 右の図のように，△ABC の辺 AB，AC を１辺とする正三角形 ABD，ACE をそれぞれ△ABC の外側につくる。このとき，BE＝DC となることを証明しなさい。

例題 111



6 右の図のように，正三角形 ABC の３辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ AD＝BE＝CF となるように点 D，E，F をとる。このとき，△DEF が正三角形となることを証明しなさい。

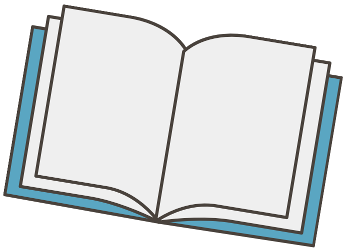
例題 112



紙面サンプルはここまでです。
弊社教材サンプルをご覧いただき
ありがとうございます。

塾・学校の先生限定サイト

Bunri Teachers'Site へのご登録で、全ページ版をご覧いただけます。



登録無料で、他にも便利な機能がたくさん！
ぜひお役立て下さい。

Bunri Teachers'Site 会員登録はこちら

※ご登録には弊社発行の招待コードが必要です。

教材サポート

単元テスト、指導用資料、
学習サポートアイテムなど
指導をサポートするコンテンツ

最新の教育情報

社会時事問題、高校入試分析、
教科書採択情報など最新の
教育に関する情報をお届け

各種教材やテストのお問い合わせ・お申込み

生徒さま一人一人に合った教材・
テスト・デジタルコンテンツを
ご提案

※Bunri Teachers' Siteは，塾・学校の先生方のための情報サイトです。
ユーザー登録していただくことで，会員限定の詳細情報をご覧いただくことができます。
本サイトは一般の方のご利用をお断りしております。予めご了承ください。

お問い合わせフォーム

招待コード発行や教材の内容・ご購入方法等
お気軽にお問い合せ下さい。

BUNRI