中学

WinPass

数学 3年

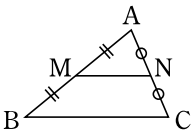
中点連結定理や相似等の問題集　中3数学｜中学WinPass

19 中点連結定理

中点連結定理

△ABC の 2 辺 AB、AC の中点をそれぞれ M、N とするとき、

$MN /\!/ BC$、$MN = \frac{1}{2}BC$　（中点連結定理）

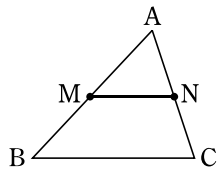


例題 1

右の図の △ABC で、辺 AB、AC の中点をそれぞれ M、N とするとき、次の問いに答えなさい。

(1)　$MN /\!/ BC$、$MN = \frac{1}{2}BC$ であることを証明しなさい。

(2)　辺 BC の中点を P とする。AB = 10 cm のとき、NP の長さを求めなさい。



解き方　(1)　三角形と比の定理を利用して証明する。

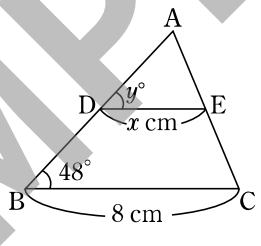
答　△ABC で、M、N はそれぞれ辺 AB、AC の中点だから、AM：AB = AN：AC = 1：2

よって、$MN /\!/ BC$　また、MN：BC = AM：AB = 1：2 より、2MN = BC　よって、$MN = \frac{1}{2}BC$

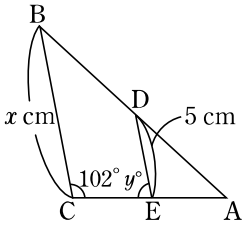
(2)　N、P はそれぞれ辺 CA、CB の中点だから、$NP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5$　**答**　5 cm

＊**問題 1**　右の図で、点 D、E がそれぞれ △ABC の辺 AB、AC の中点であるとき、x、y の値を求めなさい。

□(1)



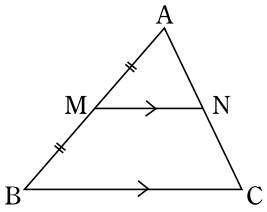
□(2)



問題 2　△ABC の辺 AB の中点を M とし、M から辺 BC に平行な直線をひいて辺 AC との交点を N とするとき、次の問いに答えなさい。

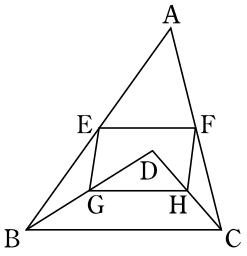
□(1)　AN：NC を求めなさい。

＊□(2)　BC = 7 cm のとき、MN の長さを求めなさい。



例題 2

右の図のように、底辺 BC が共通な △ABC と △DBC において、辺 AB、AC、DB、DC の中点をそれぞれ E、F、G、H とするとき、四角形 EGHF は平行四辺形であることを証明しなさい。



解き方　△ABC と △DBC にそれぞれ中点連結定理を用いる。

答　△ABC で、中点連結定理より、$EF /\!/ BC$、$EF = \frac{1}{2}BC$ …①

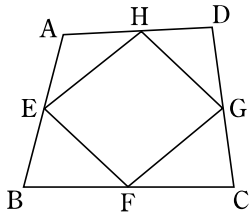
△DBC で、中点連結定理より、$GH /\!/ BC$、$GH = \frac{1}{2}BC$ …②

①、②より、$EF /\!/ GH$、EF = GH

よって、1 組の対辺が平行でその長さが等しいから、四角形 EGHF は平行四辺形である。

SAMPLE

問題 3　四角形 ABCD の辺 AB、BC、CD、DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とするとき、次の問いに答えなさい。



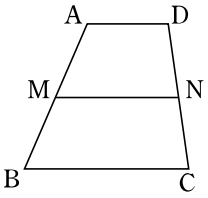
＊□(1)　四角形 EFGH が平行四辺形であることを証明しなさい。

(2)　四角形 EFGH が次の①、②のような図形になるとき、四角形 ABCD の対角線 AC と BD の間にはどのような関係があるか、式で答えなさい。

□①　ひし形　　□②　長方形

例題 3

AD ∥ BC の台形 ABCD で、辺 AB、DC の中点をそれぞれ M、N とするとき、MN ∥ BC、$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$ であることを証明しなさい。



解き方　直線 AN と辺 BC の延長との交点を E として、AD＝CE、AN＝NE を証明し、△ABE に中点連結定理を用いる。

答　直線 AN と辺 BC の延長との交点を E とする。△AND と △ENC において、

DN＝CN …①、∠AND＝∠ENC …②、AD ∥ BE より、∠ADN＝∠ECN …③

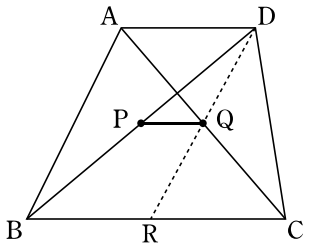
①、②、③より、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、△AND ≡ △ENC

よって、AD＝CE、AN＝NE

△ABE で、M、N はそれぞれ辺 AB、AE の中点だから、MN ∥ BE　すなわち、MN ∥ BC

また、$MN=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(BC+CE)=\frac{1}{2}(BC+AD)$　すなわち、$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$

＊**問題 4**　AD ∥ BC、AD ＜ BC の台形 ABCD で、対角線 BD、AC の中点をそれぞれ P、Q とするとき、$PQ=\frac{1}{2}(BC-AD)$ であることを次のように証明した。□ にあてはまるものを答えなさい。



〈証明〉　直線 DQ と辺 BC との交点を R とする。△AQD と △CQR において、□(1) …①　∠AQD＝□(2) …②

AD ∥ BC より、□(3) …③

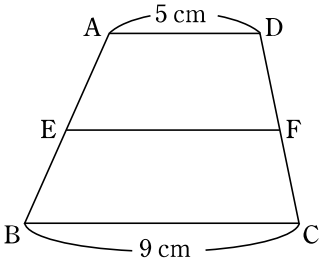
①、②、③より、1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、△AQD ≡ △CQR

よって、DQ＝□(4)、AD＝□(5)

△DBR で、P、Q は辺 DB、DR の中点だから、□(6) ∥ BR　すなわち、PQ ∥ BC

また、$PQ=\frac{1}{2}$□(7)$=\frac{1}{2}$(BC−□(8)$)=\frac{1}{2}(BC-AD)$

問題 5　右の図のような AD ∥ BC の台形 ABCD で、辺 AB、DC の中点をそれぞれ E、F とするとき、次の問いに答えなさい。



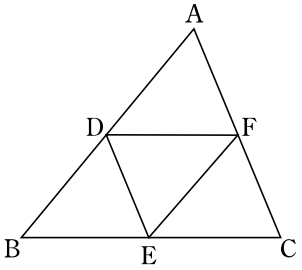
＊□(1)　EF の長さを求めなさい。

□(2)　対角線 BD と EF の交点を G とするとき、DG：DB を求めなさい。

SAMPLE

基本問題

＊**1**〈**中点連結定理**〉　右の図のように、△ABC の辺 AB、BC、CA の中点をそれぞれ D、E、F とするとき、次の問いに答えなさい。

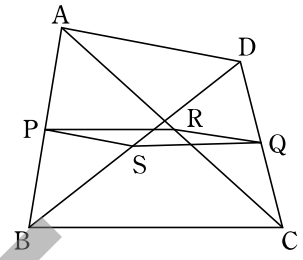


□(1)　△ABC の周の長さが 18 cm のとき、△DEF の周の長さを求めなさい。

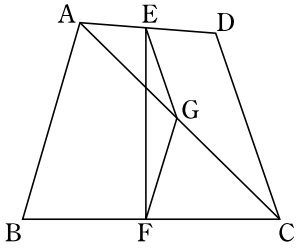
□(2)　△DBE ≡ △EFD であることを証明しなさい。

□(3)　この図の中で、∠ADF に等しい角をすべて答えなさい。

＊**2**〈**中点連結定理の利用①**〉　右の図の四角形 ABCD で、辺 AB、CD の中点をそれぞれ P、Q、対角線 AC、BD の中点をそれぞれ R、S とするとき、四角形 PSQR は平行四辺形になることを証明しなさい。



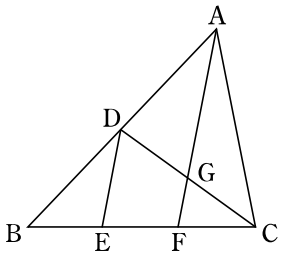
3〈**中点連結定理の利用②**〉　AD < BC の四角形 ABCD で、辺 AD、BC、対角線 AC の中点をそれぞれ E、F、G とするとき、次の問いに答えなさい。



□(1)　AB = DC のとき、△EFG はどんな三角形になりますか。

＊□(2)　∠DCA = 25°、∠BAC = 60° のとき、∠EGF の大きさを求めなさい。

4〈**中点連結定理の利用③**〉　右の図のように、△ABC の辺 AB の中点を D とし、辺 BC を 3 等分する点を B に近い方から順に E、F とする。線分 AF と CD の交点を G とするとき、次の問いに答えなさい。

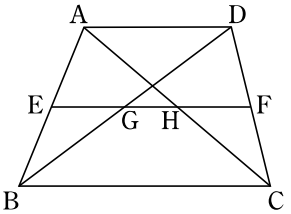


＊□(1)　DE：AF を求めなさい。

＊□(2)　DE：GF を求めなさい。

□(3)　AG：GF を求めなさい。

5〈**台形と中点連結定理**〉　右の図のような AD // BC、AD = 6 cm、BC = 10 cm の台形 ABCD で、辺 AB、DC の中点をそれぞれ E、F とし、EF が対角線 BD、AC と交わる点をそれぞれ G、H とする。次の問いに答えなさい。



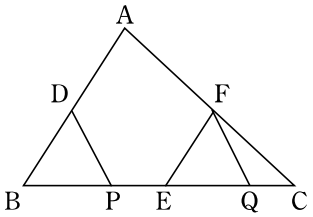
＊□(1)　EF の長さを求めなさい。

□(2)　GH の長さを求めなさい。

SAMPLE

練習問題

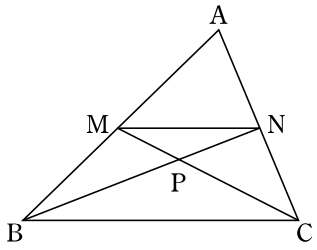
＊**1** 右の図で、点D、E、Fは、それぞれ△ABCの3辺AB、BC、CAの中点である。また、点P、Qは、辺BC上にあり、BP＝EQである。このとき、△DBP≡△FEQであることを証明しなさい。



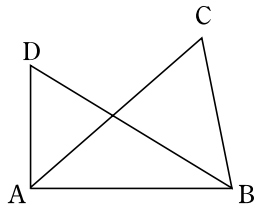
2 △ABCの辺AB、ACの中点をそれぞれM、Nとし、線分BNとCMの交点をPとするとき、次の問いに答えなさい。

(1)　△PBC∽△PNMであることを証明しなさい。

＊(2)　BP：PNを求めなさい。



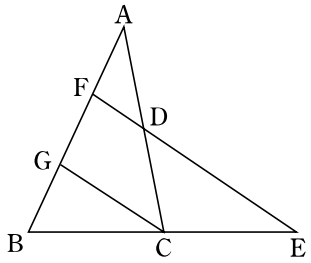
3 右の図は、底辺ABが共通の2つの三角形、△ABCと△ABDである。辺AB、BC、ADの中点をそれぞれP、Q、Rとするとき、次の問いに答えなさい。〈山梨〉



(1)　AC＝BDのとき、△PQRはどんな三角形になるか書きなさい。また、そうなることを証明しなさい。

(2)　辺AB、BC、CA、AD、DBのいずれか2辺の間に、ある関係が成り立つとき、∠QPR＝90°となる。どの2辺の間に、どんな関係が成り立つときか、書きなさい。

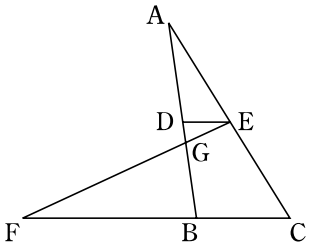
4 右の図のように、△ABCの辺ACの中点をDとし、辺BCの延長上に点EをEC＝BCとなるようにとる。直線DEと辺ABの交点をFとし、Cを通りDEに平行な直線と辺ABとの交点をGとする。このとき、次の問いに答えなさい。



(1)　AB＝12 cmのとき、線分FGの長さを求めなさい。

＊(2)　線分DEの長さは線分DFの長さの何倍か、求めなさい。

5 右の図のように、△ABCの辺AB、ACの中点をそれぞれD、Eとし、辺CBの延長上に点FをBについてCと反対側にFB＝2BCとなるようにとる。EFと辺ABとの交点をGとするとき、次の問いに答えなさい。



＊(1)　DG：GBを求めなさい。

(2)　AG：GBを求めなさい。

SAMPLE

基本の確認　まとめの問題

■得点　　/100点

1 次の［　　］にあてはまる言葉や式を答えなさい。

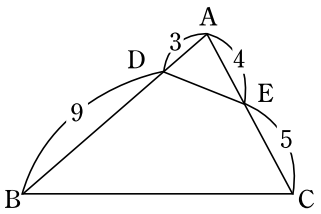
□(1)　2つの相似な図形の相似比が $m:n$ のとき、体積比は［　　］である。

□(2)　同じ弧に対する円周角の大きさは［　　］。

1　（2点×2＝4点）

(1)	
(2)	

2 右の図で、相似な三角形を記号 ∽ を使って表し、そのときに使った相似条件をいいなさい。

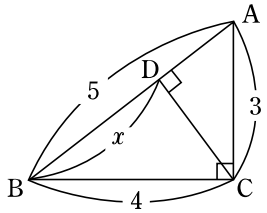


2　（4点×2＝8点）

三角形	
相似条件	

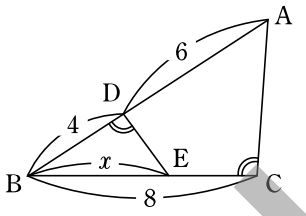
3 次の図で、x の値を求めなさい。

□(1)



∠ACB＝∠CDA＝90°

□(2)



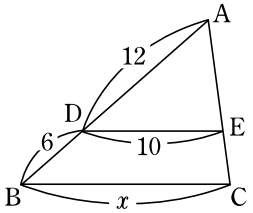
∠ACB＝∠BDE

3　（5点×2＝10点）

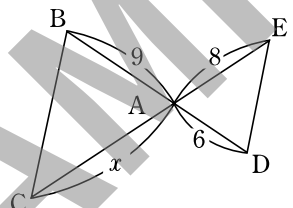
(1)	
(2)	

4 次の図で、DE // BC のとき、x の値を求めなさい。

□(1)



□(2)

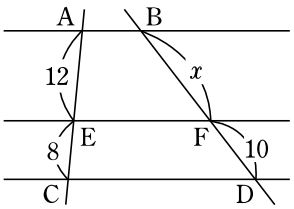


4　（5点×2＝10点）

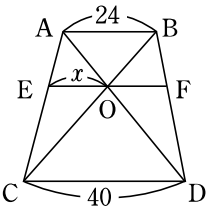
(1)	
(2)	

5 次の図で、AB // CD // EF のとき、x の値を求めなさい。

□(1)



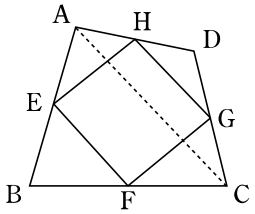
□(2)



5　（5点×2＝10点）

(1)	
(2)	

6 四角形 ABCD の辺 AB、BC、CD、DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とするとき、四角形 EFGH が平行四辺形になることを次のように証明した。［　　］にあてはまる式を答えなさい。



〈証明〉　△ABC で、中点連結定理より、

［(1)］…①　［(2)］…②

△DAC で、中点連結定理より、［(3)］…③　［(4)］…④

①、③より、EF // HG …⑤　　②、④より、EF＝HG …⑥

⑤、⑥より、四角形 EFGH は平行四辺形である。

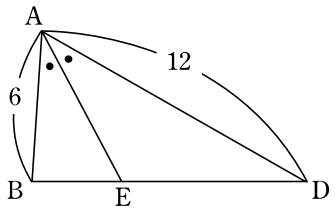
6　（3点×4＝12点）

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	

SAMPLE

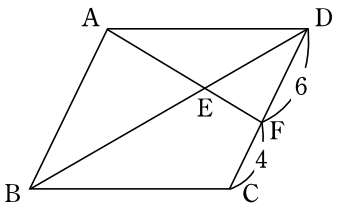
7 次の図で、△ABE と △ADE の面積の比を求めなさい。

□(1)



∠BAE ＝ ∠DAE

□(2)



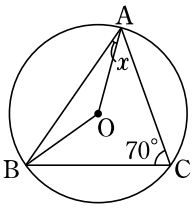
四角形 ABCD は平行四辺形

7　（5点×2＝10点）

(1)	
(2)	

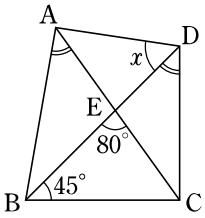
8 次の図で、∠x の大きさを求めなさい。

□(1)



点 O は円の中心

□(2)



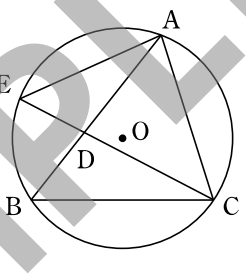
∠BAC ＝ ∠BDC

8　（5点×2＝10点）

(1)	
(2)	

9 右の図のように、3つの頂点 A、B、C が円 O の周上にある △ABC で、辺 AB 上の点を D とし、直線 CD と円 O の交点のうち、C と異なる点を E とする。このとき、△ADE ∽ △CDB であることを証明しなさい。

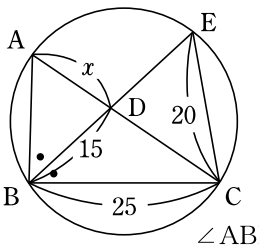
□



9　（6点）

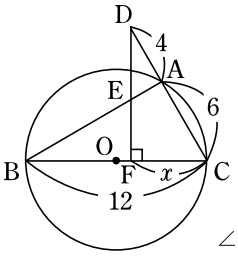
10 次の図で、x の値を求めなさい。ただし、O は円の中心である。

□(1)



∠ABE ＝ ∠CBE

□(2)



∠DFC ＝ 90°

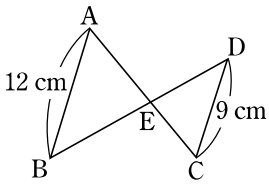
10　（5点×2＝10点）

(1)	
(2)	

11 次の問いに答えなさい。

□(1)　右の図で、AB // CD、△ABE の面積が 32 cm² のとき、△CDE の面積を求めなさい。

□(2)　相似な2つの立体があり、相似比は 5：2 である。大きい方の立体の体積が 500 cm³ のとき、小さい方の立体の体積を求めなさい。



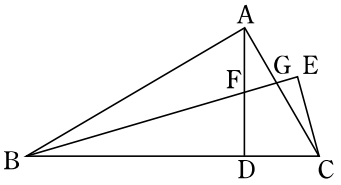
11　（5点×2＝10点）

(1)	
(2)	

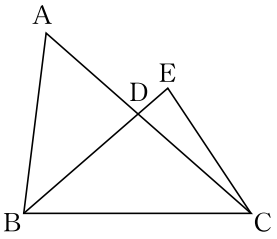
SAMPLE

章末問題

1 右の図のように、∠BAC＝90° の直角三角形 ABC がある。頂点 A から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を D とする。また、頂点 C から ∠ABC の二等分線に垂線をひき、∠ABC の二等分線との交点を E とする。さらに、線分 BE と線分 AD との交点を F、線分 BE と線分 AC との交点を G とする。このとき、△FBD ∽ △GCE であることを証明しなさい。〈茨城〉



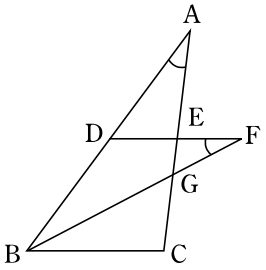
2 右の図の △ABC で、点 D は ∠ABC の二等分線と辺 AC との交点である。また、点 E は線分 BD の延長線上の点で、CD＝CE である。次の問いに答えなさい。〈岐阜改〉



(1)　△ABD ∽ △CBE であることを証明しなさい。

(2)　AB＝4 cm、BC＝5 cm、CA＝6 cm のとき、CE の長さを求めなさい。

3 右の図のように、AC＝10 cm、BC＝6 cm の △ABC がある。辺 AB、AC の中点をそれぞれ D、E とし、DE の延長上に ∠BFD＝∠BAC となるような点 F をとると、BF＝11 cm となった。BF と AC の交点を G とするとき、次の問いに答えなさい。〈兵庫改〉

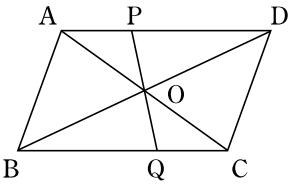


(1)　DE の長さを求めなさい。

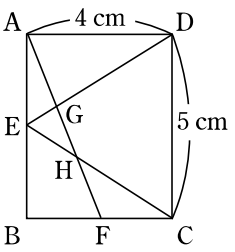
(2)　△ADE と △BGC が相似であることを証明しなさい。

♦(3)　AB の長さを求めなさい。

4 右の図のように、平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、O を通る直線が辺 AD、BC と交わる点をそれぞれ P、Q とする。BQ：QC＝3：2、△OQC＝10 cm² であるとき、△OAB の面積を求めなさい。〈富山〉

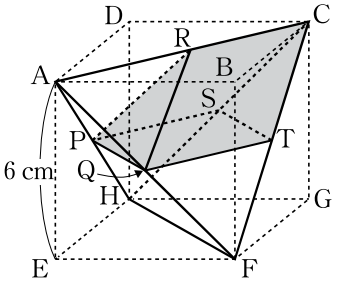


♦**5** 右の図のような長方形 ABCD があり、AD＝4 cm、DC＝5 cm である。2 点 E、F は、それぞれ辺 AB、BC の中点である。線分 AF と線分 DE との交点を G、線分 AF と線分 EC との交点を H とするとき、△EGH の面積は何 cm² か、求めなさい。〈香川〉



SAMPLE

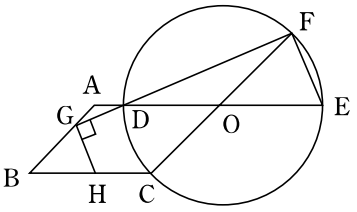
6 右の図のように、1辺が6 cmの立方体ABCD－EFGHの4つの頂点を結び、正四面体ACFHをつくる。次に、辺AH、AF、AC、CH、CFの中点P、Q、R、S、Tを直線で結び、立体PQR－STCをつくる。次の問いに答えなさい。〈岩手改〉



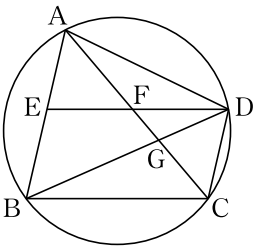
□(1)　正四面体ACFHの体積を求めなさい。

□(2)　立体PQR－STCの体積を求めなさい。

7 右の図のような、OA＞OCである平行四辺形OABCがある。点Oを中心として、点Cを通る円をかき、この円Oと辺AOとの交点をD、辺AO、COの延長と円Oとの交点をそれぞれE、Fとする。また、FDの延長と辺ABとの交点をGとする。次に、辺BC上に∠FGH＝90°となるように点Hをとる。このとき、△BGH∽△OFEとなることを証明しなさい。〈福島〉



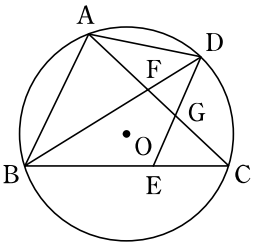
8 右の図のように、円周上の3点A、B、Cを頂点とする鋭角三角形ABCがある。円周上にAB∥DCとなる点Dをとり、線分AB上にED∥BCとなる点Eをとる。線分ACと線分ED、BDとの交点をそれぞれF、Gとする。このとき、次の問いに答えなさい。〈福井改〉



□(1)　△ABD∽△DCFであることを証明しなさい。

□(2)　AE＝5 cm、EB＝4 cm、BC＝12 cmのとき、線分DFと線分ADの長さを求めなさい。

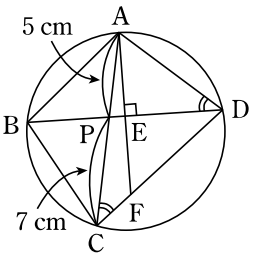
9 右の図において、3点A、B、Cは円Oの周上の点である。∠ABCの二等分線と円Oとの交点をDとし、BC上にBE＝DEとなる点Eをとる。ACとDB、DEとの交点をそれぞれF、Gとする。このとき、次の問いに答えなさい。〈静岡〉



□(1)　△ABF∽△GADであることを証明しなさい。

□(2)　AB＝6 cm、BE＝5 cm、EC＝3 cmのとき、DGの長さを求めなさい。

10 右の図で、四角形ABCDの頂点はすべて同じ円周上にあり、∠ACD＝∠ADB、BC＜DCとなっている。点Eは、点Aから線分BDにひいた垂線とBDとの交点であり、点Fは、線分AEの延長と線分CDとの交点である。また、点Pは線分ACとBDとの交点である。AP＝5 cm、PC＝7 cmであるとき、次の問いに答えなさい。〈大分〉



□(1)　△ABP∽△ACBであることを証明しなさい。

□(2)　線分ABの長さを求めなさい。

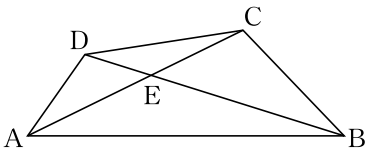
♦□(3)　AB＝BCのとき、線分CFの長さを求めなさい。

SAMPLE

思考力問題　相似

例題 1

右の図のように、四角形 ABCD の対角線の交点を E とする。
∠ADB＝∠ACB であるとき、次の問いに答えなさい。

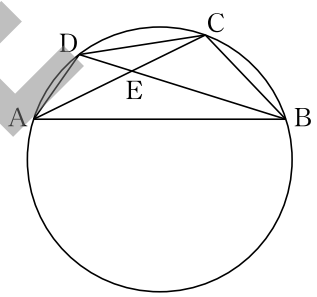


(1)　△AEB∽△DEC であることを証明しなさい。

(2)　AB＝12 cm、CD＝6 cm、BD＝$5\sqrt{6}$ cm、E は AC の中点であるとき、AE の長さを求めなさい。

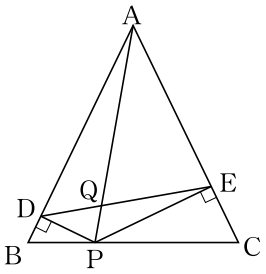
・条件に等しい角が示されたとき、何がわかるか考えよう。
⇒「等しい角」に関する図形の性質を整理する。
⇒平行線の同位角や錯角、二等辺三角形の底角、等しい弧に対する円周角など

解答　(1)　∠ADB＝∠ACB より、4 点 ① は 1 つの円周上にある。
△AEB と △DEC において、
$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角より、∠ABE＝∠ ②
対頂角より、∠AEB＝∠DEC
③ がそれぞれ等しいから、△AEB∽△DEC

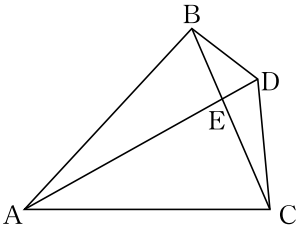


(2)　E は AC の中点だから、AE＝CE＝x とする。
(1)の相似比は、AB：DC＝12：6＝2：1 だから、
BE：CE＝2：1　　BE：x＝2：1　　BE＝ ④
AE：DE＝2：1　　x：DE＝2：1　　DE＝ ⑤
BE＋DE＝BD＝$5\sqrt{6}$ だから、
④ ＋ ⑤ ＝$5\sqrt{6}$　　x＝ ⑥ (cm)

問題 1　右の図のように、∠A が鋭角で、AB＝AC の二等辺三角形 ABC があり、点 P は辺 BC 上にある。P から辺 AB、AC に垂線をひき、AB、AC との交点をそれぞれ D、E とする。また、A と P、D と E を結び、AP と DE の交点を Q とする。∠PAB＝16°、∠AQE＝71° であるとき、∠EAQ の大きさを求めなさい。　〈石川改〉



問題 2　右の図のように、△ABC について、点 D を直線 BC に対して点 A と反対側で、線分 AD と辺 BC が交わり、∠ABC＝∠ADC となるようにとる。また、線分 AD と辺 BC との交点を E とし、点 B と点 D を結ぶ。次の問いに答えなさい。　〈宮城改〉



(1)　∠DAC＝∠DBC であることを証明しなさい。

(2)　AB＝11 cm、BD＝2 cm、AC＝10 cm、CD＝5 cm とする。BE＝t cm とするとき、AE の長さを t を使って表しなさい。また、AD：BC を求めなさい。

SAMPLE

例題 2

底面の半径が 6 cm、高さが 12 cm の円錐の形の容器がある。この容器を底面が水平になるように置き、図 1 のように水面の高さが 10 cm になるまで水を入れる。その中に、底面の半径が 4 cm の円柱の形の鉄を、底面を水平にして沈めると、水が容器からあふれ、図 2 のように円柱の形の鉄の底面と水面の高さが等しくなった。このとき、容器からあふれた水の体積を求めなさい。

図 1

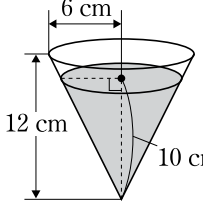
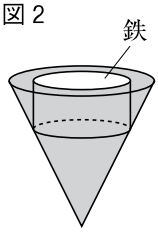


図 2



・水中に物体を沈めるとき、どんな関係が成り立つだろうか。
⇒物体は水を押しのける。体積が等しくなるのは、どの部分とどの部分かを調べよう。

解答　鉄を沈めると水面が上がり、容器がいっぱいになると水はあふれる。鉄を立体 A として、立体 B、C、D を右の図のように円錐やその一部として考えると、立体 A が押しのけた水の体積について、図 3 のような関係が成り立つ。よって、

(あふれた水)＝(立体 A)−(立体 B)

また、立体 A を沈めた円錐を、底面の中心と頂点を通る平面で切断すると、図 4 のようになるから、立体 A の高さは ① cm で、体積は、

(立体 A)＝ $\pi \times 4^2 \times$ ①＝ ② (cm^3)

さらに、図 5 で、立体 C と立体 D は相似で、その体積比は、 ③ ^{3} ： ④ ^{3}　よって、

$$(\text{立体 B}) = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 12 \times \frac{③^3 - ④^3}{③^3}$$

$$= ⑤ \ (\text{cm}^3)$$

したがって、(あふれた水)＝ ② − ⑤ ＝ ⑥ (cm^3)

図 3

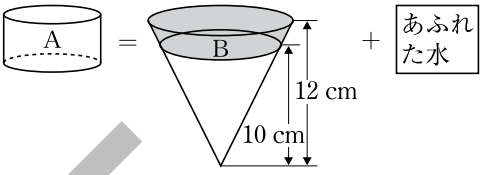


図 4

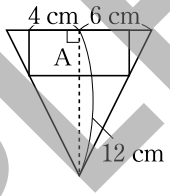
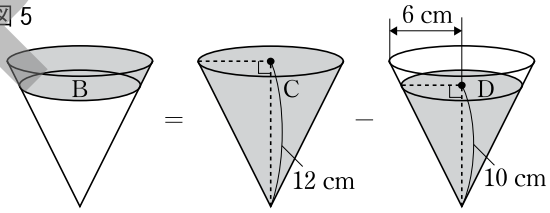


図 5



問題 3　底面が 1 辺 8 cm の正方形で高さが 12 cm の角柱の容器に水がいっぱい入れてある。この中に、底面が 1 辺 8 cm の正方形で高さが 12 cm の正四角錐を、図 1 のように底面を水平に保ちながら静かに頂点から沈めていく。角錐の頂点が、容器の底面に達してから、図 2 の状態まで角錐を引き上げると、水面の面積が容器の底面積の $\frac{3}{4}$ になった。次の問いに答えなさい。

図 1

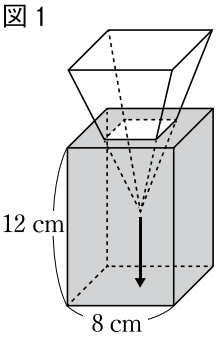
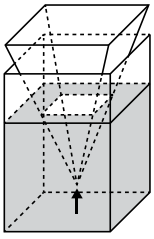


図 2



□(1)　図 2 で、角錐の水面より下の部分の体積と、はじめ容器いっぱいに入れたときの水の体積の比を求めなさい。

□(2)　図 2 のときの容器内の水の深さを求めなさい。

SAMPLE

弊社サンプルをご覧いただき、
ありがとうございました。

紙面サンプルは
ここまでです！

Bunri Teachers' Site へのご登録で、
全ページ見本※と目次をご覧いただけます。

※一部教材を除く

会員登録はこちら

Bunri Teachers' Site とは？

株式会社文理が運営する、塾・学校の先生方のための情報サイトです。

- 文理の教材紹介
- デジタルサービスやテストのお申込み
- 教育情報の発信
- オンラインセミナーのお知らせ

■ Bunri Teachers' Siteへのご登録には弊社発行の招待コードが必要です。
■ 本サイトは一般の方のご利用をお断りしております。あらかじめご了承ください。

BUNRI