中学
実力練成テキスト

数学

3年

関数の利用や変域ごとに異なる関数等の問題集　中3数学｜中学実力練成テキスト

15 関数 $y=ax^2$ の利用

●要点のまとめ●

1 関数 $y=ax^2$ の利用

いろいろなことがらにおいて、関数 $y=ax^2$ の関係を見つけることがある。グラフなども利用しながら調べる。なお、x の変域が $x>0$ になっている場合にも気をつけたい。

例　物を自由に落とすとき、落ち始めてから x 秒間に落ちた距離を y m とすると、$y=5x^2$ の関係があるものとする。このとき、落ちた距離が 20 m になるのは落ち始めてから何秒後ですか。

（答）　$y=5x^2$ で $y=20$ とすると、$20=5x^2$ より、$x^2=4$　$x>0$ だから $x=2$（秒後）

2 変域ごとに異なる関数

(1) **変域ごとに異なる関数の組み合わせ**……異なるタイプの関数を変域ごとに組み合わせて、全体として１つの関係を表す場合がある。

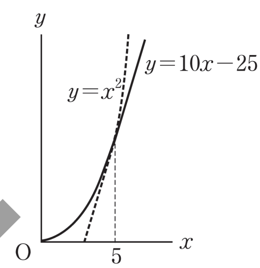
例　ある電車が動き始めてから x 秒間に進む距離は、

$0 \leqq x \leqq 5$ のとき、$y=x^2$

$5 \leqq x$ のとき、　$y=10x-25$

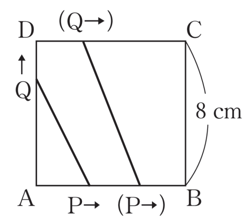
で表されるものとする。

この関数のグラフを示すと、右の図のようになる。



(2) **図形の移動と変域ごとに異なる関数**……点や図形が移動したときのいろいろな量に関する関数は、変域ごとに異なる関数の組み合わせになることが多い。

例　1 辺 8 cm の正方形 ABCD がある。点 P、Q が同時に頂点 A を出発し、正方形の辺上を、図の矢印の向きに P は毎秒 2 cm で B まで進み、Q は毎秒 4 cm で D を通って C まで進む。このとき、点 P、Q が同時に出発してから x 秒後の、正方形を線分 PQ で分けた部分のうち頂点 A を含む方の面積を y cm² とすると、x と y の関係は次のようになる。



点 Q が辺 AD 上にあるとき、

$0 \leqq x \leqq 2$ であり、y は △APQ の面積で、$y=\frac{1}{2}\times 2x\times 4x=4x^2$

点 Q が辺 DC 上にあるとき、

$2 \leqq x \leqq 4$ であり、y は台形 QDAP の面積で、$y=\frac{1}{2}\times\{(4x-8)+2x\}\times 8=24x-32$

3 いろいろな比例

○＝a×□（a は定数）という形で表されるとき、「○ は □ に比例する」という。

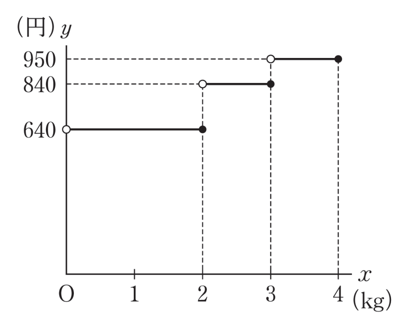
例　y は $x+3$ に比例……$y=a(x+3)$　　$y-2$ は x^2 に比例……$y-2=ax^2$　（a は比例定数）

4 いろいろな事象と関数

関数の中には、比例、反比例、1 次関数、関数 $y=ax^2$ 以外に、その他の式で表される関数や、y がとびとびの値をとる関数などいろいろある。

例　ある宅配便の小包の重さと料金の関係が表のようになっているとき、重さ x kg と料金 y 円の関係を表すグラフは、右のようになる。

重さ	料金
2 kg まで	640 円
3 kg まで	840 円
4 kg まで	950 円



例題 1　関数 $y=ax^2$ の利用

斜面で球を転がすとき、転がり始めてから x 秒間に動いた距離を y m とすると、y は x の 2 乗に比例する。いま、ある斜面で球を転がしたところ、$x=2$ のとき $y=6$ であった。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表しなさい。　　　(2)　$y=24$ となるときの時間を求めなさい。

解説　(1)　$y=ax^2$ とおき、$x=2$、$y=6$ を代入すると、$6=a\times2^2$、$a=\frac{3}{2}$ より、求める式は、$y=\frac{3}{2}x^2$

(2)　$y=\frac{3}{2}x^2$ に $y=24$ を代入すると、$24=\frac{3}{2}x^2$　よって、$x^2=24\times\frac{2}{3}=16$　$x>0$ だから、$x=4$

答　(1)　$y=\frac{3}{2}x^2$　　(2)　4 秒

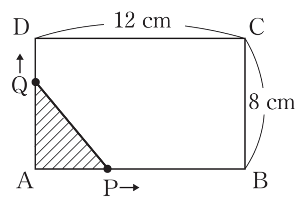
1　時速 x km で走っている自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでの距離を y m とするとき、y は x^2 に比例するものとする。ある自動車が時速 50 km で走っているときにブレーキをかけたところ、停止するまでの距離は 25 m であった。この自動車について、次の問いに答えなさい。

□(1)　y を x の式で表しなさい。

□(2)　ブレーキをかけ始めてから停止するまでの距離が 16 m になるのは、時速何 km で走っているときですか。

例題 2　変域ごとに異なる関数

右の図のように、たて 8 cm、横 12 cm の長方形 ABCD がある。2 点 P、Q が頂点 A を同時に出発し、点 P は毎秒 3 cm の速さで辺 AB 上を B まで動き、点 Q は、毎秒 4 cm の速さで辺 AD 上、DC 上を D を通って C に向かって動く。このとき、点 P、Q が同時に出発してから x 秒後の △APQ の面積を y cm^2 として、次の問いに答えなさい。ただし、$0\leqq x\leqq4$ とする。



(1)　x と y の関係を式で表し、x の変域も示しなさい。　　(2)　x と y の関係をグラフに表しなさい。

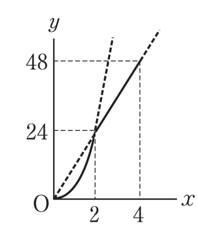
解説　点 Q が辺 AD 上にあるときと辺 DC 上にあるときに分けて考える。

(1)　$0\leqq x\leqq2$ のとき、点 Q は辺 AD 上にあり、$y=\frac{1}{2}\times3x\times4x=6x^2$

$2\leqq x\leqq4$ のとき、点 Q は辺 DC 上にあり、$y=\frac{1}{2}\times3x\times8=12x$

答　$0\leqq x\leqq2$ のとき、$y=6x^2$、$2\leqq x\leqq4$ のとき、$y=12x$

(2)　(1)の結果をグラフに表すと、右の図のようになる。

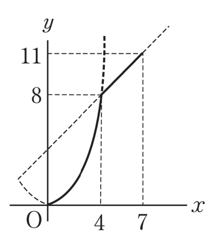


2　y は x の関数であり、x の変域は $0\leqq x\leqq7$ で、x と y の間には、

$0\leqq x\leqq4$ のとき、$y=ax^2$…①

$4\leqq x\leqq7$ のとき、$y=bx+c$…②

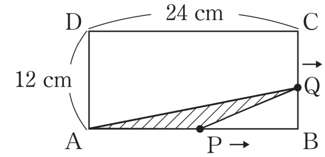
のような関係がある。また、x と y の関係をグラフに表すと、右の図のようになる。これについて、次の問いに答えなさい。



□(1)　a、b、c の値を求めなさい。

□(2)　$y=6$ のときの x の値を求めなさい。

3　右の図のように、たて 12 cm、横 24 cm の長方形 ABCD がある。点 P は、A を出発して、辺 AB、BC 上を毎秒 6 cm の速さで A → B → C の順に C まで動く。また、点 Q は、P が A を出発したのと同時に B を出発し、辺 BC 上を毎秒 2 cm の速さで C まで動く。このとき、点 P、Q が同時に出発してから x 秒後の △APQ の面積を y cm^2 として、次の問いに答えなさい。



□(1)　x と y の関係を求めなさい。また、x の変域も示しなさい。

□(2)　△APQ の面積が長方形 ABCD の面積の $\frac{1}{6}$ になるのは、点 P、Q が同時に出発してから何秒後ですか。

例題３　いろいろな比例

$y+3$ は x^2 に比例し、$x=2$ のとき $y=5$ である。y を x の式で表しなさい。

解説　$y+3=ax^2$ と表されるから、これに $x=2$、$y=5$ を代入して、$5+3=a\times2^2$、$a=2$
よって、$y+3=2x^2$ だから、3 を右辺に移項して、$y=2x^2-3$　　答　$y=2x^2-3$

4　次の問いに答えなさい。

□(1)　$y-1$ は x^2 に比例し、$x=3$ のとき、$y=-26$ である。y を x の式で表しなさい。

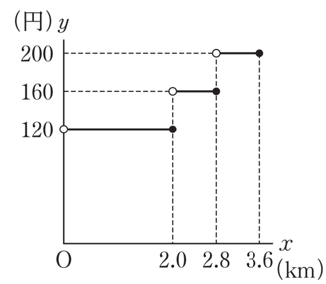
□(2)　y は $(x+2)^2$ に比例し、$x=-4$ のとき $y=8$ である。$x=3$ のときの y の値を求めなさい。

例題４　いろいろな事象と関数

あるバス料金について、バスに乗る距離 x km と料金 y 円の関係をグラフに表すと、右のようになった。このとき、

・このバス料金は、はじめの 2.0 km までは ① 円である。
・その後は ② km おきに、③ 円ずつ加算される。
・このきまりで加算されるとき、5.0 km 乗ったときの料金は ④ 円になる。

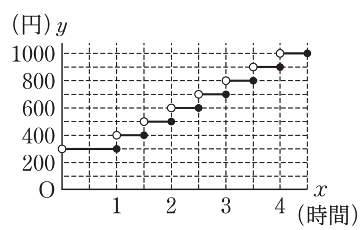
□ にあてはまる数を求めなさい。



解説　$0<x\leqq2.0$ のとき、$y=120$
$2.0<x\leqq2.8\,(=2.0+0.8)$ のとき、$y=120+40=160$
$2.8<x\leqq3.6\,(=2.8+0.8)$ のとき、$y=160+40=200$
$3.6<x\leqq4.4\,(=3.6+0.8)$ のとき、$y=200+40=240$
$4.4<x\leqq5.2\,(=4.4+0.8)$ のとき、$y=240+40=280$

答　①　120　　②　0.8　　③　40　　④　280

5　あるスケート場の料金について、使用時間を x 時間、そのときの料金を y 円としてグラフに表すと、右のようになった。これについて、次の問いに答えなさい。



□(1)　$x=2.8$ のとき、y の値を求めなさい。

□(2)　$y=1200$ のとき、x の最大値を求めなさい。

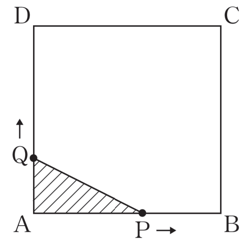
標準問題

頻 **1** **〈関数 $y=ax^2$ の利用〉**　直線上を同じ方向に動く3点A、B、Cがある。直線上の点Oを出発してから x 秒間に、点Aは $\frac{1}{2}x$ cm、点Bは $\frac{1}{4}x^2$ cm、点Cは x^2 cm動く。点Aが出発してから4秒後に点Bが出発し、点Bが出発してから6秒後に点Cが出発する。次の問いに答えなさい。　〈東京・青山改〉

□(1)　点Cが出発して、t 秒後から $(t+1)$ 秒後までの1秒間の点Cの平均の速さが7 cm/秒 となるとき、t の値を求めなさい。

□(2)　点Cが点Bに追いついたとき、2点A、B間の距離は何cmか求めなさい。

頻 **2** **〈変域ごとに異なる関数①〉**　1辺の長さが4 cmの正方形ABCDの辺上を動く2点P、Qがある。点Pは点Aを出発し、毎秒2 cmの速さで辺上を反時計回りに進む。また、点Qは点Pと同時に点Aを出発し、毎秒1 cmの速さで辺上を時計回りに進む。2点P、Qが点Aを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm² とするとき、次の問いに答えなさい。ただし、(1)については、空欄に適する数や式を記入すること。　〈慶應義塾高改〉



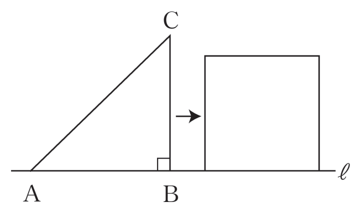
□(1)　2点P、Qがはじめて同じ地点に到達するのは、点Aを出発してから [(ア)] 秒後であるから、

$0<x<$ [(ア)] ……①　の範囲で、y を x を用いて表すと、$0<x\leqq$ [(イ)] のとき、$y=$ [(ウ)]

[(イ)] $\leqq x\leqq$ [(エ)] のとき、$y=$ [(オ)]　　[(エ)] $\leqq x<$ [(ア)] のとき、$y=$ [(カ)]

□(2)　$y=3$ となるときの x の値を①の範囲で求めなさい。

3 **〈変域ごとに異なる関数②〉**　右の図のように、直線 ℓ 上に、AB＝BC＝6 cm、∠B＝90°の直角二等辺三角形ABCと、1辺5 cmの正方形がある。正方形は固定して、直角二等辺三角形を ℓ にそって矢印の方向へ毎秒1 cmの速さで動かす。このとき、次の問いに答えなさい。　〈愛光高〉



□(1)　△ABCと正方形が重なり始めてから2秒後の、重なっている部分の面積を求めなさい。

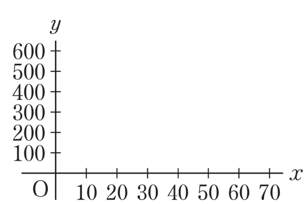
□(2)　△ABCと正方形が重なっている部分の面積がはじめて10 cm² となるのは、重なり始めてから何秒後か求めなさい。

4 **〈いろいろな比例〉**　y は x^2 に比例する式と定数との和で表され、$x=1$ のとき $y=2$、$x=-2$ のとき
□$y=-4$ である。y を x の式で表しなさい。

5 **〈いろいろな事象と関数〉**　次の表のような、ある荷物の配達料金について、次の問いに答えなさい。

重さ	10 gまで	20 gまで	30 gまで	40 gまで	50 gまで	60 gまで	70 gまで
料金	120円	200円	280円	360円	440円	520円	600円

□(1)　この配達料金のきまりで料金が加算される場合、95 gのときの料金を求めなさい。



□(2)　重さ x gのときの料金を y 円として、上の表のきまりを、

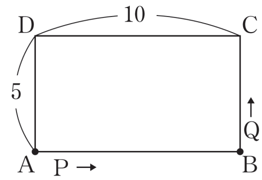
$0<x\leqq 10$ のとき、$y=120$　　$10<x\leqq 20$ のとき、$y=200$

と表すとき、同様に残りの部分のきまりを、x、y で表しなさい。

□(3)　x と y の関係をグラフに表しなさい。

発展問題

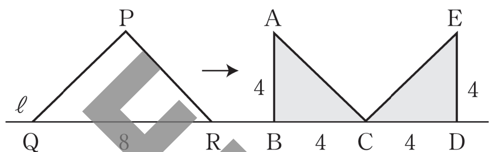
類 **1** 右の図のように、AB＝10 cm、AD＝5 cm の長方形 ABCD がある。いま、点 P は点 A、点 Q は点 B から同時にスタートし、長方形 ABCD の辺上をそれぞれ反時計回りに動く。点 P は１秒間に 2 cm、点 Q は１秒間に 4 cm の速さで動くとする。スタートしてから x 秒後に、長方形 ABCD を線分 PQ で分割したもののうち、面積の大きくない方を $y$cm² とする。次の問いに答えなさい。〈同志社高〉



□(1)　線分 PQ が、はじめて長方形 ABCD の面積を２等分するのは、スタートしてから何秒後ですか。

□(2)　点 Q が点 D に達するまでの y を x の式で表しなさい。

2 右の図のように、直角をはさむ２辺の長さが 4 cm である直角二等辺三角形を２つ合わせた図形 ABCDECA がある。いま、斜辺の長さが 8 cm である直角二等辺三角形 PQR を直線 ℓ にそって、矢印の方向に毎秒 1 cm の速さで動かしていく。点 R が点 B に重なってから x 秒後の △PQR と図形 ABCDECA の重なった部分の面積を y cm² とする。次の問いに答えなさい。〈白陵高〉



□(1)　y を x で表しなさい。

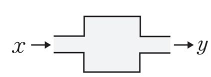
□(2)　$y=5$ のときの x の値を求めなさい。

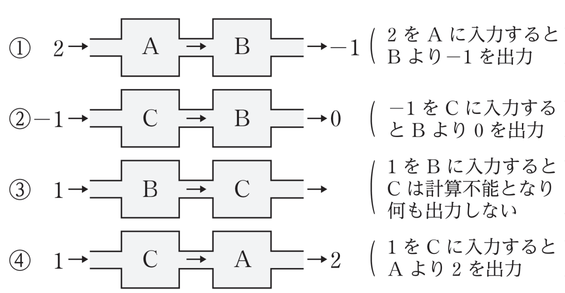
3 正の数 x の整数部分を $[x]$ で表す。例えば $[0.7]=0$、$[2]=2$、$[\sqrt{2}]=1$ である。次の問いに答えなさい。〈埼玉・開智高改〉

□(1)　$y=[x]$ のグラフを、$0<x\leqq 5$ の範囲でかきなさい。また、その結果を利用して、$[x]=\frac{3}{4}x$ を満たす x の値を、$0<x\leqq 5$ の範囲ですべて求めなさい。

□(2)　$y=[x^2]$ のグラフを、$0<x\leqq 2$ の範囲でかきなさい。また、その結果を利用して、$[x^2]=3x-3$ を満たす x の値を、$0<x\leqq 2$ の範囲ですべて求めなさい。

4 右の図は、左から数 x を入力すると、それに対応して数 y を出力する箱を示している。３種類の箱 A、B、C は、(ア)　$y=ax+b$、(イ)　$y=\frac{c}{x}$、(ウ)　$y=dx^2$ のいずれかの対応をする。右の①～④は A と B、C と B などを接続したものである。ただし、a、b、c、d はどれも 0 ではなく、誤作動しないものとする。次の問いに答えなさい。〈城北埼玉高改〉





□(1)　A、B、C は(ア)、(イ)、(ウ)のどの対応ですか。

□(2)　定数 a、b、c、d の値を求めなさい。

16 放物線と直線

●要点のまとめ●

1 放物線と直線の交点

(1) **放物線と直線の交点**……放物線 $y=ax^2$…①と直線 $y=mx+n$…②の交点の座標は、2 つの式を連立方程式として解いて求めることができる。

例　放物線 $y=x^2$…①と直線 $y=x+6$…②の交点の座標は、①と②の連立方程式を解いて求める。
①、②より $x^2=x+6$　これを解くと $x=-2$、3 で、交点は $(-2,\ 4)$、$(3,\ 9)$

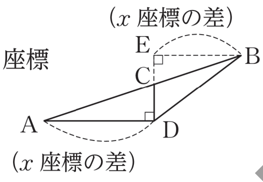
(2) **連立 2 次方程式**……2 次式の形の方程式を含む連立方程式を、連立 2 次方程式という。
連立 2 次方程式のうち、右のような形のものは「代入法」で解くとよい。
すなわち、①を②に代入して $ax^2=mx+n$　この 2 次方程式を解く。

$$\begin{cases} y=ax^2 & \cdots\cdots① \\ y=mx+n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

2 線分の長さと面積

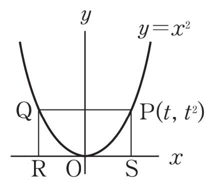
(1) **線分の長さ**……x 軸や y 軸に平行な線分の長さは、x 座標(または y 座標)の差で求めることができる。
また、次の①、②に注意すること。

①**線分の長さの比**
……線分の両端の x 座標(または y 座標)の差の比に等しい。



例　AC：BC
＝(A と C の x 座標の差)：(B と C の x 座標の差)

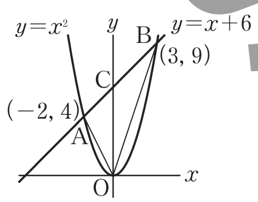
②**放物線と四角形**
……四角形が正方形になるときを求めるには、点の座標を t で表して解くとよい。



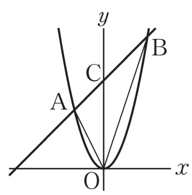
例　四角形 PQRS が正方形になるとき、
PS＝PQ より、$t^2=2t$　$t>0$ より、$t=2$

(2) **面積**……三角形の面積を求めるときは、x 軸や y 軸に平行な線分を底辺や高さにすることを考える。
また、次の①～③に注意すること。

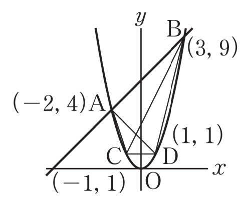
① いくつかの図形の組み合わせで面積を求めることがある。
例　△AOB
＝△AOC＋△BOC



② 高さが同じ三角形の面積の比は、底辺の比に等しい。
例　△AOC：△BOC
＝AC：BC



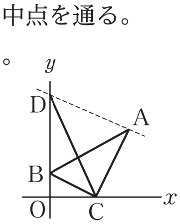
③ 底辺が同じ三角形の面積の比は、高さの比に等しい。
例　△ACD：△BCD
＝(4−1)：(9−1)



(3) **面積の 2 等分**……①三角形の頂点を通る面積の二等分線は、頂点に向かい合う辺の中点を通る。
②平行四辺形や長方形の面積の二等分線は、対角線の交点を通る。

(4) **等積変形の利用**……底辺や高さが軸に平行でない三角形の面積を求めるときは、等積変形を利用するとよい。

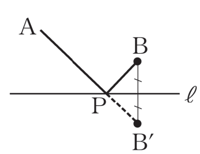
例　右の図で、DA∥BC とすると、△ABC＝△DBC＝$\dfrac{1}{2}$×DB×OC



3 図形の性質の利用

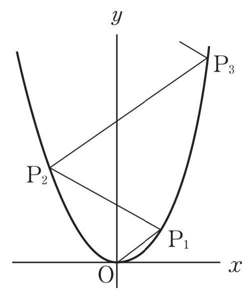
(1) **2 直線の直交**……2 直線が直交するとき、(2 直線の傾きの積)＝−1

(2) **AP+BP の最短距離**……右の図で、点 P が ℓ 上にあり、AP＋BP が最短になるのは、ℓ について B と対称な点 B′ をとり、線分 AB′ と ℓ の交点が P のときである。



章末チャレンジ問題

1 右の図のように $y=x^2$ のグラフにおいて、OP_1、P_2P_3、P_4P_5、……の傾きが 2、P_1P_2、P_3P_4、P_5P_6、……の傾きが -2 となるように、P_1、P_2、……をとるとき、次の問いに答えなさい。〈京都女子高〉

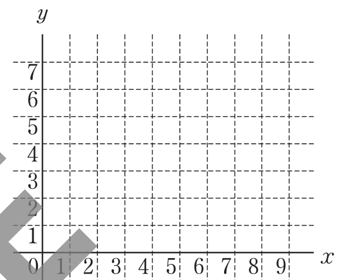


□(1)　P_1、P_2、P_3 の値を求めなさい。

□(2)　この折れ線 $OP_1P_2P_3$…の上の点で、y 座標が 50 になるときの x 座標を求めなさい。

2 次のように関数を定める。

$$y=\begin{cases} x^2\,(0\leqq x<2) \\ \dfrac{10}{x}\,(2\leqq x<5) \\ -2x+13\,(5\leqq x<6) \\ \dfrac{1}{18}x^2\,(6\leqq x<9) \end{cases}$$



この関数について、次の問いに答えなさい。〈早稲田大本庄高等学院〉

□(1)　直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と上で定義した関数のグラフとの交点の個数を求めなさい。

□(2)　直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ と上で定義した関数のグラフとの交点の個数が 2 個となるような k の範囲を求めなさい。ただし、$0\leqq k\leqq 5$ の範囲内とする。

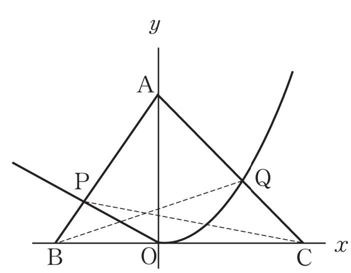
□(3)　直線 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ と上で定義した関数のグラフとの交点の座標をすべて求めなさい。

3 点 O を原点とする座標平面上で、放物線 $y=2x^2$ と y 切片が 5 の直線 ℓ とが 2 点 A、B で交わっており、A の x 座標が -1 である。放物線上の点 P、y 軸上の点 Q を、AP // QB、AQ // PB となるようにとる。次の問いに答えなさい。〈慶應義塾志木高〉

□(1)　3 点 B、P、Q の座標を求めなさい。また、四角形 APBQ の面積 S を求めなさい。

□(2)　点 C(3, 0) を通り、四角形 OPBA の面積を 2 等分する直線の方程式を求めなさい。

4 右の図において、A(0, 8)、B(-6, 0)、C(8, 0) である。線分 AB 上の点 P、線分 AC 上の点 Q は、それぞれ AP：PB＝2：1、AQ：QC＝1：1 を満たす。また、直線 $y=ax$ は点 P を通り、曲線 $y=bx^2$ は点 Q を通るものとする。次の問いに答えなさい。〈学習院高〉

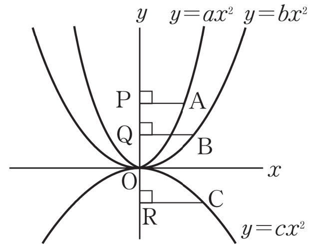


□(1)　点 P、Q の座標を求めなさい。

□(2)　定数 a、b の値を求めなさい。

□(3)　△PBC と △QBC の重なった部分の面積を求めなさい。

5 3つの放物線 $y=ax^2$、$y=bx^2$、$y=cx^2\,(a>b>0,\ c<0)$ がある。右の図のように、各放物線上に3点A、B、Cをとり、それらの点から y 軸に垂線AP、BQ、CRを引く。このとき、3つの三角形△OAP、△OBQ、△OCRをつくると、それらの面積は△OAP＝△OBQ＝△OCR＝18である。次の問いに答えなさい。　〈慶應義塾高〉



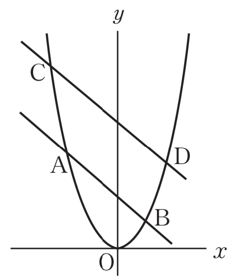
□(1)　点Aの x 座標が2のとき、a の値を求めなさい。

□(2)　点Bの x 座標が正の整数で、$1<b<2$ のとき、点Bの座標と b の値を求めなさい。

□(3)　(1)、(2)で求めた2点A、Bを通る直線の式を求めなさい。

□(4)　(3)で求めた直線AB上に点Cがあるとき、点Cの座標と c の値を求めなさい。

頻 **6** 右の図のように、放物線 $y=x^2$ が直線 $y=-x+6$ と2点A、Bで交わり、直線 $y=-x+12$ と2点C、Dで交わっている。このとき、次の問いに答えなさい。　〈愛光高〉

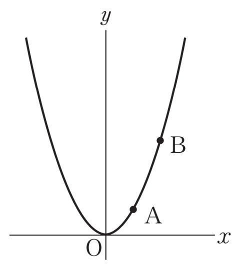


□(1)　4点A、B、C、Dの座標を求めなさい。

□(2)　四角形ABDCの面積を求めなさい。

□(3)　直線 $y=x+a$ が四角形ABDCの面積を2等分するとき、a の値を求めなさい。

7 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に点 $A\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$、$B\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$ があり、点C、Dは y 軸上の点とする。次の問いに答えなさい。　〈立教新座高〉

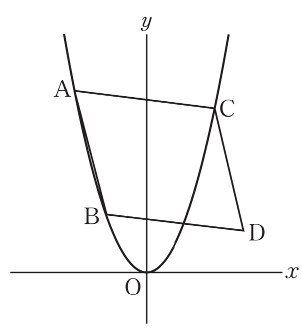


□(1)　AC＋BCが最小となるような点Cの座標を求めなさい。

□(2)　AD⊥BDとなる点Dの座標に対して、△ABDの面積が最大となるとき、直線ADの式を求めなさい。

□(3)　(1)を満たす点C、(2)を満たす点Dについて、4点A、B、C、Dがつくる四角形の面積と△AECの面積が等しくなるような放物線上の点Eの x 座標を求めなさい。

8 放物線 $y=x^2$ 上に3点A、B、Cがあり、それぞれの点の x 座標は a、-2、4である。また、四角形ABDCはひし形である。このとき、次の問いに答えなさい。ただし、$a<-2$ とする。　〈ラ・サール高〉



□(1)　対角線ADとBCの交点Eの座標を求めなさい。

□(2)　a の値を求めなさい。

□(3)　点Dの座標を求めなさい。