重要パターン演習

数学 2年

二訂版

文字式の利用や等式変形等の問題集　中2数学｜重要パターン演習

第１章　式の計算

§2. 文字式の利用

Introduction　文字式による説明，等式変形

文字式を使うと，あることがらをより抽象的かつ正確にとらえることができるようになる。以下の例を考えてみよう。

▶ 文字式による説明

例えば，「連続する３つの自然数の和は，３の倍数になる。」が本当に正しいかどうかを考えてみる。

連続する３つの自然数として，いろいろな例を挙げてみると，

$1+2+3=6,\ 2+3+4=9,\ 3+4+5=12,\ 4+5+6=15,\ \cdots$

確かに，6，9，12，15 が３の倍数となっており，３つの連続する自然数の和は，３の倍数になりそうである。

しかし，これらは，連続する３つの自然数のごく一部である。他にも，$5+6+7$，$6+7+8$，…，$101+102+103$，…，$999+1000+1001$，…など無限に挙げられ，そのすべてが３の倍数であることをいうのは不可能である。そこであらゆる数の代表として，文字を扱う。例えば，連続する３つの自然数の真ん中の数を n とすると，それらは，$n-1$，n，$n+1$ と表せる。

☞文字の役割
① 定数
② 変数
③ 未知数
の①の役割として用いられている。

$n=7$ とすれば，連続する３つの自然数は，6，7，8，

$n=102$ とすれば，連続する３つの自然数は，101，102，103，

$n=1000$ とすれば，連続する３つの自然数は，999，1000，1001 となり，n の値があらゆる自然数(注)をとると考えれば，すべての連続する３つの自然数を表すことができる。そこで，これらの文字を用いて，連続する３つの自然数の和を計算すると，$(n-1)+n+(n+1)=3n$ となり，3×（自然数）の形になっていることから，３の倍数であることが確認できる。このように，文字を使うと，具体例を用いずに説明ができることになる。

☞（注）厳密には，n は２以上の自然数

▶ 等式変形

例えば，等式 $y=x+3$ を $x=y-3$ という形に表しなおすことを**等式変形**という。等式変形では，中１学習内容の等式の性質が必要なので，再度確認しておく。

① $A=B \Rightarrow A+C=B+C$　　② $A=B \Rightarrow A-C=B-C$

③ $A=B \Rightarrow AC=BC$　　④ $A=B \Rightarrow \dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C}$　（ただし，$C\neq0$）

☞数学のルール上，分母に０がこないので，$C\neq0$ である。

また，当たり前だが，等式変形の計算ではよく使うので，以下の性質も確認しておこう。

⑤ $A=B \Rightarrow B=A$

例題 13 <等式変形(1)>

次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。

(1)　$a+b=c$　$[a]$　　(2)　$xy=z$　$[x]$

(3)　$m=a+b+c$　$[a]$　　(4)　$x=\frac{2}{3}yz$　$[y]$

解答

Point　**等式の性質や移項を用いて，方程式と同じ要領で解く。**

(1)　$a+b=c$　　b を右辺に移項して，$\boldsymbol{a=c-b}$

(2)　$xy=z$　　両辺を y でわって，$\boldsymbol{x=\frac{z}{y}}$

(3)　$m=a+b+c$　　左辺と右辺を入れかえて，$a+b+c=m$

b と c を右辺に移項して，$\boldsymbol{a=m-b-c}$

別解　a と m をそれぞれ移項して，$-a=-m+b+c$

両辺に -1 をかけて，$\boldsymbol{a=m-b-c}$

(4)　両辺に 3 をかけて，$3x=2yz$

左辺と右辺を入れかえて，$2yz=3x$

両辺を $2z$ でわって，$\boldsymbol{y=\frac{3x}{2z}}$

☞ $x=\cdots$と表す場合，これを「**x について解く**」という。

☞ a を左辺にもっていかなければならないが，移項するよりも左辺と右辺を入れかえた方が楽に解ける。

☞ 分母をはらうために 3 をかける。

❒ **Ex.014** ❒　次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。

(1)　$x+2y=3$　$[x]$　　(2)　$a-b=2m$　$[a]$

(3)　$at=v$　$[t]$　　(4)　$2ab=c$　$[b]$

(5)　$z=2x+y$　$[y]$　　(6)　$S=\pi\ell r$　$[r]$

(7)　$S=\frac{1}{2}ah$　$[a]$　　(8)　$\frac{a+3b}{2}=4c$　$[a]$

例題 14 ＜等式変形(2)＞

次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。

(1) $y=2x-3$ ［x］　(2) $x=\dfrac{3m+4n}{7}$ ［m］　(3) $V=\dfrac{S(2a+b)}{3}$ ［a］

解答

Point まず，分母をはらう。
解きたい文字を左辺にもっていく。

☞解きたい文字を左辺にもっていくときには，符号を－にしないように工夫する。

(1) $y=2x-3$　左辺と右辺を入れかえて，$2x-3=y$

-3 を移項して，$2x=y+3$

両辺を 2 でわって，$\boldsymbol{x=\dfrac{y+3}{2}}$

☞ $x=\dfrac{y}{2}+\dfrac{3}{2}$でも可

(2) $x=\dfrac{3m+4n}{7}$　両辺に 7 をかけて，$7x=3m+4n$

☞まず，分母をはらう。

左辺と右辺を入れかえて，$3m+4n=7x$

$4n$ を移項して，$3m=7x-4n$

両辺を 3 でわって，$\boldsymbol{m=\dfrac{7x-4n}{3}}$

(3) $V=\dfrac{S(2a+b)}{3}$　両辺に 3 をかけて，$3V=S(2a+b)$

☞まず，分母をはらう。

両辺を S でわって，$\dfrac{3V}{S}=2a+b$ …①

左辺と右辺を入れかえて，$2a+b=\dfrac{3V}{S}$ …②

☞①と②の順序は入れかわってもよい。

b を移項して，$2a=\dfrac{3V}{S}-b$

両辺を 2 でわって，$\boldsymbol{a=\dfrac{3V}{2S}-\dfrac{b}{2}}$

☞ $a=\dfrac{3V-bS}{2S}$でも可

❒ **Ex.015** ❒　次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。

(1) $2x+3y=6$ ［x］

(2) $y=2x-1$ ［x］

(3) $z=\dfrac{2x+y}{3}$ ［x］

(4) $\dfrac{2b-3c}{5}=a$ ［c］

(5) $x=2(p-q)$ ［q］

(6) $m=3(a+b)$ ［a］

(7) $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h$ ［b］

(8) $V=\dfrac{S}{3}(a+b+c)$ ［c］

例題 15 <等式変形(3)>

等式 $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ を a について解きなさい。

解答

Point　$A=B \Rightarrow \dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{B}$ を活用　or　等式は分母をはらう

右辺と左辺を入れかえて，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$

$\dfrac{1}{b}$ を右辺に移項して，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{b}$

右辺を通分して，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{b-f}{bf}$

逆数をとって，$\boldsymbol{a=\dfrac{bf}{b-f}}$

別解　両辺に abf をかけて，$ab=bf+af$

af を左辺に移項して，$ab-af=bf$

分配法則の逆を用いて，左辺を整理すると，$a(b-f)=bf$

両辺を $b-f$ でわって，$\boldsymbol{a=\dfrac{bf}{b-f}}$

☞ a を左辺にもっていく。

☞右辺を通分すると，分母は bf

☞この等式は，レンズの公式や並列回路の合成抵抗の公式に使われる。

☞ $ma+mb=m(a+b)$

❒ Ex.016 ❒　等式 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$ を c について解きなさい。

例題 16 <等式変形と式の値>

次の式の値を求めなさい。

(1)　$5x+y=3x-5y$ のとき，$\dfrac{3x+y}{x-y}$ の値　　(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$ のとき，$\dfrac{-4xy}{x+5xy+y}$ の値

解答

Point　条件式から式の値を求める問題…最後に文字で約分して数になる。
1　1文字消去　　2　項の文字をそろえる
等式は分母をはらう。

(1)　$5x+y=3x-5y$ より，$x=-3y$

これを代入して，$\dfrac{3x+y}{x-y}=\dfrac{3\times(-3y)+y}{(-3y)-y}=\dfrac{-8y}{-4y}=\boldsymbol{2}$

(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$ の両辺に xy をかけて，$x+y=3xy$

これを代入して，$\dfrac{-4xy}{x+5xy+y}=\dfrac{-4xy}{3xy+5xy}=\dfrac{-4xy}{8xy}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

☞ $5x+y=3x-5y$
　$5x-3x=-5y-y$
　$2x=-6y$

☞ x を消去して，最後に y で約分

☞等式は分母をはらう。

☞最後に xy で約分

❒ Ex.017 ❒　次の式の値を求めなさい。

(1)　$x+3y=3x-y$ のとき，$\dfrac{-3x+2y}{2x+4y}$ の値　　(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-5$ のとき，$\dfrac{x-6xy+y}{x+2xy+y}$ の値

例題 17 <文字式の利用(1)・整数の性質(1)>

次の問いに答えなさい。

(1) 奇数と偶数との和は奇数であることを，次のように文字式を用いて説明した。空らんを正しくうめなさい。

m，n を整数とすると，奇数は $\boxed{\text{ア}}$，偶数は $\boxed{\text{イ}}$ と表せる。

奇数と偶数との和は，

$$(\boxed{\text{ア}})+(\boxed{\text{イ}})=\boxed{\text{ウ}}$$
$$=2(\boxed{\text{エ}})+1$$

$\boxed{\text{エ}}$ は整数だから，$2(\boxed{\text{エ}})+1$ は奇数である。したがって，奇数と偶数との和は奇数である。

(2) 5 の倍数と 5 の倍数の和は，5 の倍数であることを文字式を用いて説明しなさい。

解答

Point **数は文字式で表す。**
n の倍数→ $n\times$(整数)の形を利用

☞偶数→$2\times$(整数)
奇数→$2\times$(整数)$+1$

(1) m，n を整数とすると，奇数は $\boldsymbol{2m+1}$，偶数は $\boldsymbol{2n}$ と表せる。

奇数と偶数との和は，

$$(2m+1)+2n=\boldsymbol{2m+2n+1}$$
$$=2(\boldsymbol{m+n})+1$$

$m+n$ は整数だから，$2(m+n)+1$ は奇数である。

したがって，奇数と偶数との和は奇数である。

ア $2m+1$　イ $2n$　ウ $2m+2n+1$　エ $m+n$

☞ $m+n$ が整数であることを明記しないと，$2(m+n)+1$ が奇数であるとはいえない。

☞ 5 の倍数→$5\times$(整数)

(2) m，n を整数とすると，2 つの 5 の倍数は $5m$，$5n$ と表せる。

5 の倍数と 5 の倍数の和は，

$$5m+5n=5(m+n)$$

$m+n$ は整数だから，$5(m+n)$ は 5 の倍数である。

したがって，5 の倍数と 5 の倍数の和は，5 の倍数である。

□Ex.018□ 次のことがらを，それぞれ文字式を用いて説明しなさい。

(1) 奇数と奇数との和は偶数である。

(2) 8 の倍数と 8 の倍数との和は，8 の倍数である。

(3) 3 の倍数と 3 の倍数の差は，3 の倍数である。

(4) 4 でわると 1 余る数と 4 でわると 3 余る数との和は 4 の倍数である。

例題 18 ＜文字式の利用⑵・整数の性質⑵＞

２けたの整数において，十の位の数と一の位の数を入れかえた整数ともとの整数との差は９の倍数であることを説明しなさい。

解答

Point　**各位の文字を設定**
n の倍数→ n×（整数）の形を利用

２けたの整数の十の位を a，一の位を b とすると，
もとの２けたの整数は $10a+b$，十の位の数と一の位の数を入れかえた整数は $10b+a$ と表せる。

$$(10b+a)-(10a+b)=9b-9a$$
$$=9(b-a)$$

$b-a$ は整数だから，$9(b-a)$ は９の倍数である。
したがって，２けたの整数において，十の位の数と一の位の数を入れかえた整数ともとの整数との差は９の倍数である。

☞入れかえると，十の位が b，一の位が a となる。

☞９の倍数→９×（　）の形に変形する。

❒Ex.019❒　２けたの整数において，十の位の数と一の位の数を入れかえた整数ともとの整数との和は 11 の倍数であることを説明しなさい。

例題 19 ＜文字式の利用⑶・整数の性質⑶＞

３けたの整数で，各位の数の和が９の倍数のとき，その整数も９の倍数であることを説明しなさい。

解答

各位の数の和が９の倍数→文字式で表す

３けたの整数の百の位を a，十の位を b，一の位を c とすると，３けたの整数は，$100a+10b+c$ と表せる。各位の数の和が９の倍数であることから，k を整数として，$a+b+c=9k$ と表せる。

$$100a+10b+c=(99a+a)+(9b+b)+c$$
$$=99a+9b+a+b+c$$
$$=99a+9b+9k=9(11a+b+k)$$

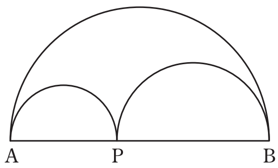
$11a+b+k$ は整数だから，$9(11a+b+k)$ は９の倍数である。
したがって，３けたの整数で，各位の数の和が９の倍数のとき，その整数も９の倍数である。

☞ $a+b+c$ をつくるために，$100a$ を $99a$ と a，$10b$ を $9b$ と b に分ける。
☞９の倍数→９×（　）の形に変形する。

❒Ex.020❒　３けたの整数で，各位の数の和が３の倍数のとき，その整数も３の倍数であることを説明しなさい。

例題 20 ＜文字式の利用⑷・図形への利用⑴＞

線分 AB を直径とする半円をかき，弧の長さを L とする。右の図のように線分 AB 上に点 P をとり，AP, PB を直径とする半円をかき，それぞれの弧の長さを，ℓ_1，ℓ_2 とする。このとき，$L=\ell_1+\ell_2$ が成り立つことを説明しなさい。



解答

Point　必要な文字を設定。弧の長さ→直径を文字でおく。

AP$=a$，PB$=b$ とすると，

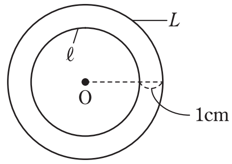
$L=(a+b)\pi\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\pi a+\dfrac{1}{2}\pi b$

$\ell_1+\ell_2=\dfrac{1}{2}\pi a+\dfrac{1}{2}\pi b$

よって，$L=\ell_1+\ell_2$ が成り立つ。

☞弧の長さ
$=$直径$\times\pi\times\dfrac{\text{中心角}}{360°}$

❐ **Ex.021** ❐　点 O を中心とする円 O_1 があり，円周の長さを ℓ とする。点 O を中心として，円 O_1 より半径が 1cm 長い円 O_2 をかき，円周の長さを L とする。このとき，円 O_1 の半径の長さによらず，L と ℓ の差が一定であることを説明しなさい。



例題 21 ＜文字式の利用⑸・図形への利用⑵＞

ある円柱 A がある。円柱 A の底面の半径を半分にし，高さを 2 倍にした円柱 B をつくる。このとき，円柱 B の体積は，円柱 A の体積の何倍になるか，求めなさい。

解答

Point　必要な文字を設定。柱体の体積＝(底面積)×(高さ)

円柱 A の底面の半径を r，高さを h とすると，

円柱 B の底面の半径は$\dfrac{1}{2}r$，高さは $2h$ と表せる。

円柱 A の体積は，πr^2h

円柱 B の体積は，$\pi\times\left(\dfrac{1}{2}r\right)^2\times 2h=\dfrac{1}{2}\pi r^2h$

$\dfrac{1}{2}\pi r^2h\div\pi r^2h=\dfrac{1}{2}$より，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$**倍**

☞円の面積
＝(円周率)×(半径)^2
よって，円柱の体積を求めるのに必要なものは，半径と高さになる。

☞（円柱 B の体積）÷（円柱 A の体積）

❐ **Ex.022** ❐　円錐 A がある。円錐 A の底面の半径を 3 倍し，高さを $\dfrac{1}{3}$ 倍にした円錐 B をつくる。このとき，円錐 B の体積は，円錐 A の体積の何倍になるか，求めなさい。

練 習 問 題

1　次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。　例題 13

(1)　$x-y=z$　$[x]$

(2)　$x-y=z$　$[y]$

(3)　$x-y+z=0$　$[z]$

(4)　$ab=cd$　$[b]$

(5)　$ab=c+d$　$[a]$

(6)　$ab+cd=ef$　$[a]$

(7)　$a(b-c)=d$　$[a]$

(8)　$4xy=8z$　$[y]$

(9)　$\dfrac{cd}{ab}=e$　$[d]$

(10)　$S=\dfrac{1}{2}ah$　$[h]$

2　次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。　例題 14

(1)　$2x-3y=5z$　$[x]$

(2)　$2x-3y=5z$　$[y]$

(3)　$x=\dfrac{a+b}{2}$　$[a]$

(4)　$x=\dfrac{3a-4b}{7}$　$[b]$

(5)　$a(b+c)=1$　$[b]$

(6)　$2(ab+cd)=1$　$[d]$

(7)　$\dfrac{(a+b)c}{6}=e$　$[a]$

(8)　$a=\dfrac{2}{3}(b+2c)$　$[c]$

(9)　$\dfrac{(4+b)h}{2}=18$　$[b]$

(10)　$y=\dfrac{n}{2}(x-2m)$　$[m]$

3　次の等式を a について解きなさい。　例題 15

(1)　$\dfrac{1}{a}=b$

(2)　$\dfrac{1}{a}=b+c$

(3)　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{c}{b}$

(4)　$\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$

(5)　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+1$

(6)　$\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$

4　次の式の値を求めなさい。　例題 16

(1)　$3x-2y=4x+2y$ のとき，$\dfrac{2x+5y}{x-y}$ の値

(2)　$x+y=-xy$ のとき，$\dfrac{2xy}{5x+xy+5y}$ の値

(3)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-2$ のとき，$\dfrac{-3xy}{3x+xy+3y}$ の値

5 次の問いに答えなさい。 例題 17

(1) 連続する3つの自然数の和は，3の倍数である。このことを，文字式を用いて説明しなさい。

(2) 3でわると1余る数と，3でわると2余る数の和は，3でわり切れる。このことを，文字式を用いて説明しなさい。

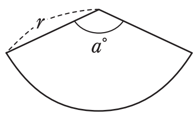
(3) 連続する2つの奇数の和は4の倍数である。このことを，文字式を用いて説明しなさい。

6 3けたの整数において，百の位の数と一の位の数を入れかえた整数と，もとの整数との差は9の倍数である。このことを，文字式を用いて説明しなさい。 例題 18

7 4けたの整数において，各位の数の和が9の倍数のとき，その整数も9の倍数である。このことを，文字式を用いて説明しなさい。 例題 19

8 半径の差が2mである2つの円の円周の長さの差を，円周率をπとして求めなさい。 例題 20

9 半径r，中心角a°のおうぎ形の弧の長さをℓ，面積をSとする。このとき，次の問いに答えなさい。 例題 20



(1) $S=\frac{1}{2}\ell r$となることを説明しなさい。

(2) 半径rが3cm，おうぎ形の弧の長さℓが4π cmのとき，面積Sの値を求めなさい。

10 次の問いに答えなさい。 例題 21

(1) 1辺の長さが$a$cmの正方形がある。この1辺の長さを3倍にすると，正方形の面積は何倍になるか，求めなさい。

(2) 底面の半径が$r$cm，高さが$h$cmの円柱Aがある。その底面の半径を3倍にし，高さを$\frac{1}{2}$にした円柱Bをつくる。このとき，円柱Bの体積は円柱Aの体積の何倍になるか，求めなさい。

(3) 底面が1辺$a$cmの正方形，高さが$b$cmの正四角柱Aがある。底面の正方形の1辺がAの2倍，高さが$\frac{1}{2}$の正四角柱Bをつくる。このとき，正四角柱Bの体積は正四角柱Aの体積の何倍になるか，求めなさい。

実力問題

1　次の等式を［　］の中の文字について解きなさい。

(1)　$\ell=2\pi(r-a)$　　［a］

(2)　$2x-3y+6=0$　　［y］

(3)　$V=v\left(1+\dfrac{t}{273}\right)$　　［t］

(4)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+1$　　［b］

2　温度の表し方では，華氏（単位℉）と摂氏（単位℃）が代表的であり，華氏で表された温度 F が，摂氏では C と表されるとき，これらの関係は，$C=\dfrac{5}{9}(F-32)$ と表される。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$F=95$ のときの C の値を求めなさい。

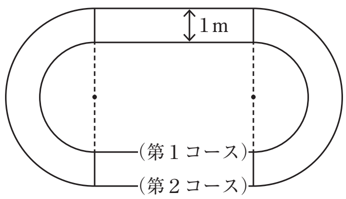
(2)　F を C の式で表しなさい。

3　a，b はともに正の整数である。a を７でわると２余り，b を７でわると５余る。$2a>3b$ のとき，$2a-3b$ を７でわると余りは常にある整数になる。このわけを文字を用いて説明し，ある整数を求めなさい。

4　右の図のように１から28までの自然数が書かれた表で，５つの数を✕で囲む。✕印の５つの数の和が，✕印の中央の数の５倍になることを，文字を使って説明しなさい。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

5　右の図のように，白線のラインが引かれたトラックがあり，ライン上を走者は走るものとする。このとき，第１コースと第２コースの１周の長さの差を求めなさい。



6　右の図の長方形 ABCD で，たてと横の長さの比は２：３である。この長方形 ABCD を，辺 AB を軸として１回転させてできる立体を P，辺 BC を軸として１回転させてできる立体を Q とする。このとき，次の問いに答えなさい。

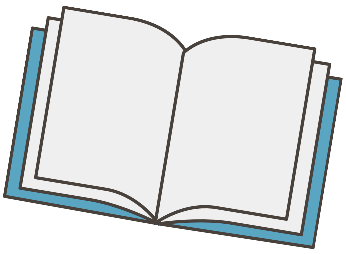
(1)　立体 P と立体 Q の体積の比を求めなさい。

(2)　辺 AB を２倍，辺 BC を$\dfrac{1}{2}$にしたとき，立体 P と立体 Q の体積の比を求めなさい。

紙面サンプルはここまでです。
弊社教材サンプルをご覧いただき
ありがとうございます。

塾・学校の先生限定サイト

Bunri Teachers'Site へのご登録で、全ページ版をご覧いただけます。



登録無料で、他にも便利な機能がたくさん！
ぜひお役立て下さい。

Bunri Teachers'Site 会員登録はこちら

※ご登録には弊社発行の招待コードが必要です。

教材サポート

単元テスト、指導用資料、
学習サポートアイテムなど
指導をサポートするコンテンツ

最新の教育情報

社会時事問題、高校入試分析、
教科書採択情報など最新の
教育に関する情報をお届け

各種教材やテストのお問い合わせ・お申込み

生徒さま一人一人に合った教材・
テスト・デジタルコンテンツを
ご提案

※Bunri Teachers' Siteは，塾・学校の先生方のための情報サイトです。
ユーザー登録していただくことで，会員限定の詳細情報をご覧いただくことができます。
本サイトは一般の方のご利用をお断りしております。予めご了承ください。

お問い合わせフォーム

招待コード発行や教材の内容・ご購入方法等
お気軽にお問い合せ下さい。

資料ご請求フォーム

弊社教材カタログ、教材やセミナーの
最新情報をお手元にお届けします！

BUNRI