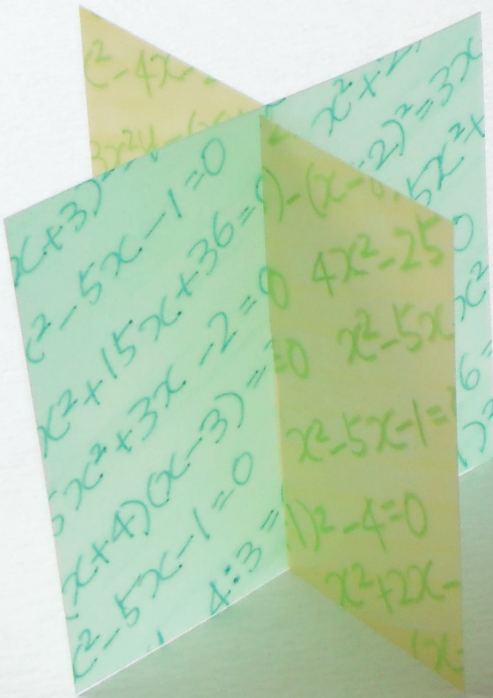
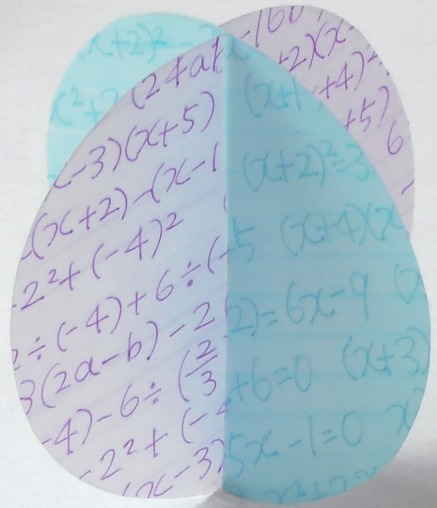


数学 3年

$(2\sqrt{2})^2$
 $(2\sqrt{2})^2 - 16$
 $2x(x+2)$
 $(x+5)^2$
 $(x+4)^2$
 $(5) - 62$
 $\sqrt{18} - \sqrt{28}$
 $2\sqrt{7} - 6\sqrt{4}$
 $(\sqrt{5} + 7\sqrt{2})$
 $(2\sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{2})$
 $(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{2}})$



放物線と直線や三角形の面積等の問題集 中3数学 | 重要パターン演習

§ 2. 放物線と直線

Introduction

放物線と直線, 三角形の面積, 発展 放物線と直線との交点

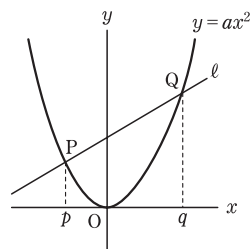
▶ 放物線と直線

右の図のように, 放物線 $y=ax^2$ と直線 ℓ が交わっていて, その交点の x 座標を p, q とすると, 直線 ℓ の傾きは, $a(p+q)$, 切片は $-apq$ と表せる。よって, 直線 ℓ の式は, $y=a(p+q)x-apq$ と表せる。

[証明] 右の図で, 点 P は (p, ap^2) , Q は (q, aq^2) と表せる。

$$(\text{傾き}) = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{a(q+p)(q-p)}{q-p} = a(p+q)$$

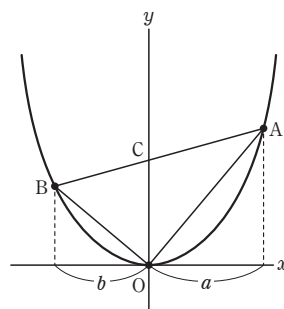
直線 ℓ の式を, $y=a(p+q)x+b$ として, $x=p, y=ap^2$ を代入すると, $ap^2=a(p+q)p+b$ これを解いて, $b=-apq$
よって, 直線 ℓ は, $y=a(p+q)x-apq$ となる。



▶ 三角形の面積

右の図のような三角形 OAB の面積を求めるときは, 次のように考える。

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times OC \times a + \frac{1}{2} \times OC \times b \\ &= \frac{1}{2} \times OC \times (a+b) \\ &= \frac{1}{2} \times OC \times (\text{2点 } A, B \text{ の } x \text{ 座標の差})\end{aligned}$$



発展

▶ 放物線と直線との交点

放物線と直線との交点は, 最大2つできる。次の問題を考えてみよう。

問題 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ との交点の座標を求めなさい。

解 交点の座標は連立方程式の解と一致するので,

$$\text{連立方程式 } \begin{cases} y=x^2 \cdots \text{①} \\ y=x+2 \cdots \text{②} \end{cases} \text{ の解を求めると,}$$

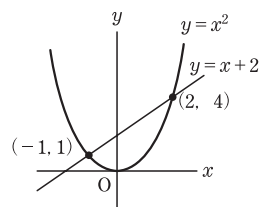
$$\text{①を②に代入して, } x^2 = x+2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x=2, -1$$

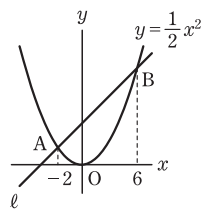
$$\text{①に代入して, } (x, y) = (2, 4), (-1, 1)$$



☞ 放物線と直線の交点の数は, 2つ, 1つ, ないの3つの場合がある。

例題 103 <直線の式を求める>

右の図で、直線 ℓ の式を求めなさい。



解答

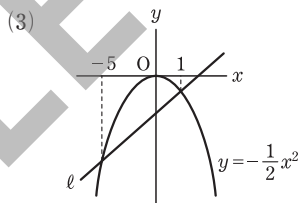
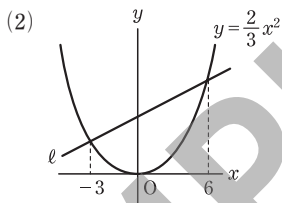
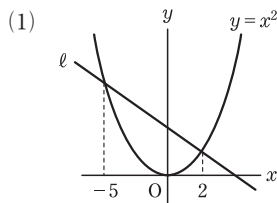
Point 直線の式…2点 A, B の座標を求める or 公式 $y=a(p+q)x-apq$ を利用

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-2, 6$ を代入して、A, B の座標を求めると、 $A(-2, 2), B(6, 18)$

2点 A, B の直線の式を求めると、 $y=2x+6$

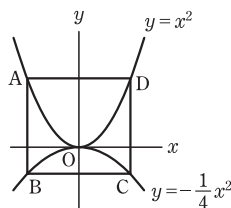
別解 公式より、 $y=\frac{1}{2}(-2+6)x-\frac{1}{2}\times(-2)\times6=2x+6$

□ Ex.128 □ 次の図で、直線 ℓ の式を求めなさい。



例題 104 <放物線と正方形>

右の図で、四角形 ABCD が正方形となるときの、正方形の1辺の長さを求めなさい。



解答

Point 座標平面上の正方形…分からない座標を文字でおき、方程式をつくる。

点 C, D の x 座標を t とすると、 $C(t, -\frac{1}{4}t^2), D(t, t^2)$ と表せる。

$AD=2t, CD=t^2 - (-\frac{1}{4}t^2) = \frac{5}{4}t^2$ $AD=CD$ より、 $\frac{5}{4}t^2=2t$

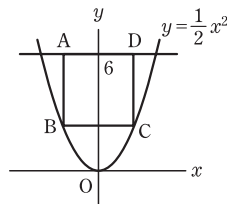
$t>0$ より、 $t=\frac{8}{5}$ よって、正方形の1辺の長さは、 $2t=2\times\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$

□ 軸に平行な線分の長さ
= (大きい方の座標)
- (小さい方の座標)

□ Ex.129 □ 右の図で、四角形 ABCD が正方形となるときの、次の問いに答えなさい。

(1) 点 C の x 座標を t として、点 B, D の座標をそれぞれ t を用いて表しなさい。

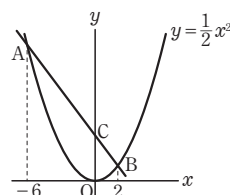
(2) 正方形の1辺の長さを求めなさい。



例題 105 <三角形の面積(1)>

右の図で、2点 A, B の x 座標はそれぞれ $-6, 2$ である。次の問いに答えなさい。

- (1) 直線 AB の式を求めなさい。
- (2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

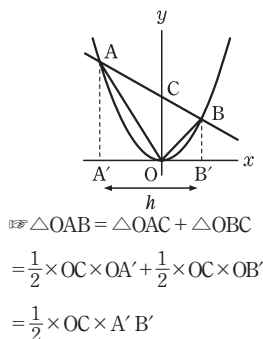


解答

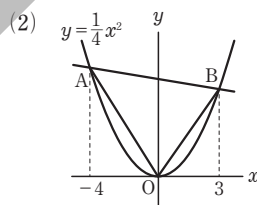
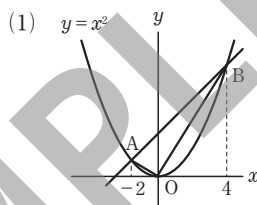
Point 右の図で、 $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times OC \times A'B'$

- (1) 2点 A, B の座標は、 $A(-6, 18)$, $B(2, 2)$ となる。2点 A, B を通る直線の式は、 $y = -2x + 6$
- (2) (1)より、点 C の y 座標は 6 となる。

$$\text{よって、} \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 6 \times \{2 - (-6)\} = 24$$



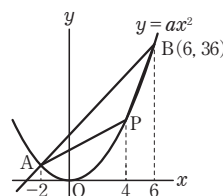
□ Ex.130 □ 次の図で $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



例題 106 <三角形の面積(2)>

右の図で、A の x 座標は -2 、B の座標は $(6, 36)$ である。また、点 P は $y = ax^2$ 上にあり、 x 座標は 4 である。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 直線 AB の式を求めなさい。
- (3) $\triangle PAB$ の面積を求めなさい。

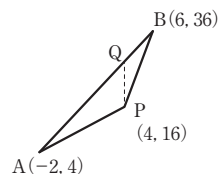


解答

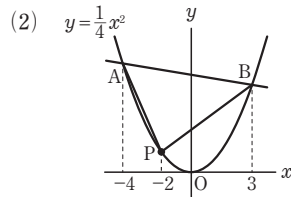
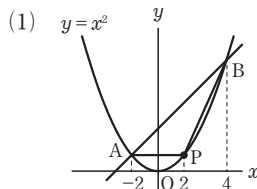
Point 右の図で、 $\triangle PAB = \frac{1}{2} \times PQ \times (A \text{ と } B \text{ の } x \text{ 座標の差})$

- (1) $y = ax^2$ は点 $(6, 36)$ を通るので、 $36 = a \times 6^2$ よって、 $a = 1$
- (2) A の座標は $(-2, 4)$ となる。直線 AB の式を求めると、 $y = 4x + 12$
- (3) 右図のように点 Q をとると、(Q の y 座標) $= 4 \times 4 + 12 = 28$

$$\text{よって、} \triangle PAB = \frac{1}{2} \times (28 - 16) \times \{6 - (-2)\} = 48$$

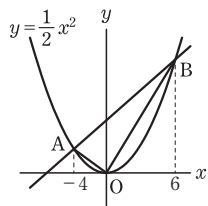


□ Ex.131 □ 次の図で $\triangle PAB$ の面積を求めなさい。



例題 107 <三角形の2等分(1)>

右の図で、原点を通り、 $\triangle OAB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。

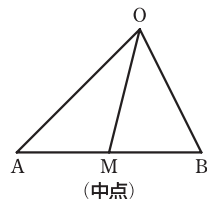


解答

Point 頂点を通り、三角形の面積を2等分する直線…対辺の中点を通る。

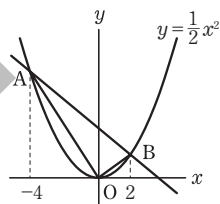
A, Bの座標は $A(-4, 8)$, $B(6, 18)$ となる。2点A, Bを通る直線の式を求めると、 $y = x + 12$ ABの中点をMとして座標を求めると、 $M(1, 13)$ 線分OMが $\triangle OAB$ の面積を2等分する。

よって、原点と点Mを通る直線の式は、 $y = 13x$



□Ex.132□ 右の図について、次の問いに答えなさい。

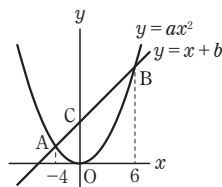
- (1) 原点を通り、 $\triangle OAB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。
- (2) 点Bを通り、 $\triangle OAB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。



例題 108 <三角形の2等分(2)>

右の図で、2点A, Bは放物線 $y = ax^2 (a > 0)$ と $y = x + b$ の交点である。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) a, b の値を求めなさい。
- (2) 点Cを通り、 $\triangle OAB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。



解答

- (1) 2点A, Bは $A(-4, 16a)$, $B(6, 36a)$ と表せる。

直線ABの傾きは1なので、 $\frac{36a - 16a}{6 - (-4)} = 1$ よって、 $a = \frac{1}{2}$

$A(-4, 8)$, $B(6, 18)$ となり、直線ABは $y = x + 12$ よって、 $b = 12$

- (2) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 12 \times \{6 - (-4)\} = 60$, $\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$

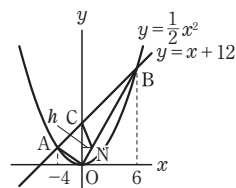
求める直線とOBとの交点をNとし、Nからy軸にひいた垂線の長さをhとする。

$\triangle OCN = 60 \div 2 - 24 = 6$ より、 $\frac{1}{2} \times 12 \times h = 6$ よって、 $h = 1$

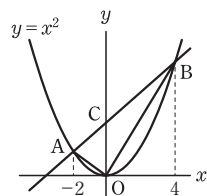
直線OBの式は、 $y = 3x$ よって、 $N(1, 3)$

2点C(0, 12), N(1, 3)を通る直線の式は、 $y = -9x + 12$

☞ $a(-4+6) = 1$,
 $-a \times (-4) \times 6 = b$ としてもよい。

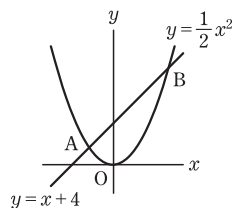


□Ex.133□ 右の図で、点Cを通り、 $\triangle OAB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。



例題 109 <放物線と直線との交点>

右の図で、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = x + 4$ の交点 A, B の座標をそれぞれ求めなさい。



Point 交点の座標…連立方程式の解と一致する。

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \cdots ① \\ y = x + 4 \cdots ② \end{cases} \text{ の連立方程式の解が交点の座標になる。}$$

①を②に代入して、 $\frac{1}{2}x^2 = x + 4$ 整理して、 $x^2 - 2x - 8 = 0$

因数分解して、 $(x-4)(x+2) = 0$ これを解くと、 $x = -2, 4$

$x = -2$ のとき、 $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$ $x = 4$ のとき、 $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

よって、交点の座標は、 $A(-2, 2), B(4, 8)$

2 次方程式の因数分解による解法。

解が出たあと、図より、どちらが A, B の座標かを判断すること。

□ Ex.134 □ 次の放物線と直線との交点の座標を求めなさい。

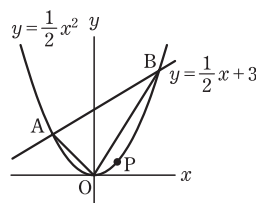
(1) $y = x^2, y = 2x + 15$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2, y = -x - 12$

(3) $y = 2x^2, y = -6x - 4$

例題 110 <等積変形(1)>

右の図のように、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + 3$ が 2 点 A, B で交わっている。放物線上の 2 点 O, B の間に $\triangle AOB$ の面積と $\triangle APB$ の面積が等しくなるような点 P をとるとき、P の座標を求めなさい。

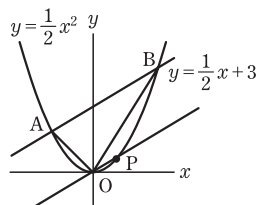


Point 面積が等しく、1 辺を共有…等積変形

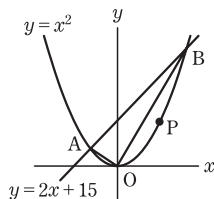
$\triangle AOB = \triangle APB$ であるのは、 $AB \parallel OP$ のときである。

直線 AB の傾きは $\frac{1}{2}$ なので、直線 OP の式は、 $y = \frac{1}{2}x$ である。

点 P は $y = \frac{1}{2}x^2$ と $y = \frac{1}{2}x$ の交点となり、求めると、 $P(1, \frac{1}{2})$

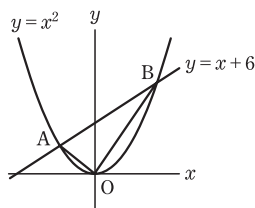


□ Ex.135 □ 右の図のように、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 15$ が 2 点 A, B で交わっている。放物線上の 2 点 O, B の間に $\triangle AOB$ の面積と $\triangle APB$ の面積が等しくなるような点 P をとるとき、P の座標を求めなさい。



例題 111 <等積変形(2)>

右の図のように、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+6$ が2点 A, B で交わっている。放物線上に $\triangle AOB$ の面積と $\triangle APB$ の面積が等しくなるような点 P をとるとき、P の座標をすべて求めなさい。



解答

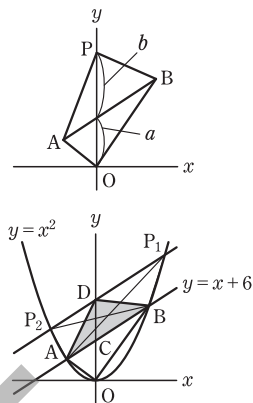
Point 右図で $\triangle AOB = \triangle APB$ のとき、 $a=b$

2点 O, B の間に点 P をとると、 $\triangle AOB = \triangle APB$ より、 $AB \parallel OP$ だから、OP の式は $y=x$

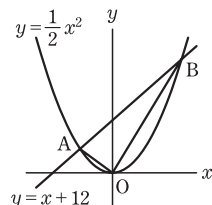
$y=x^2$ と $y=x$ との交点を求めると、 $(1, 1)$

また、右の図のように y 軸上に、 $OC=CD$ となる点 $D(0, 12)$ をとり、点 D を通り、AB に平行な直線①をひき、等積変形をする。

AB の傾きは1で、①の式は、 $y=x+12$ である。 $y=x^2$ と $y=x+12$ との交点を求めて、 $P_1(4, 16)$, $P_2(-3, 9)$

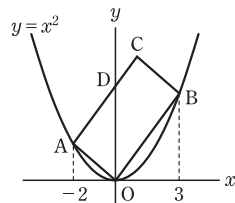


□ Ex.136 □ 右の図のように、放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x+12$ が2点 A, B で交わっている。放物線上に $\triangle AOB$ の面積と $\triangle APB$ の面積が等しくなるような点 P をとるとき、P の座標をすべて求めなさい。



例題 112 <放物線と平行四辺形>

右の図で、四角形 OACB が平行四辺形となるとき、点 C の座標を求めなさい。そのとき、点 D を通り、平行四辺形 OACB の面積を2等分する直線の式を求めなさい。



解答

Point 座標平面上の平行四辺形

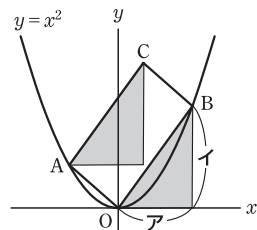
- ① 右の図で網目の三角形が合同 ② 面積を2等分する直線は、対角線の交点を通る

A(-2, 4), B(3, 9) より、右の図で、 $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = 9$ 網目部分の三角形は合同なので、 $C(-2+3, 4+9)$ よって、 $C(1, 13)$

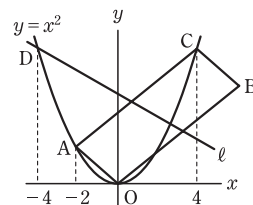
したがって、直線 AC の式は、 $y=3x+10$ となり点 D(0, 10)

平行四辺形を2等分する直線は対角線の交点、つまり、対角線の中点

M を通る。 $M(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$ より、直線 DM は、 $y=-7x+10$



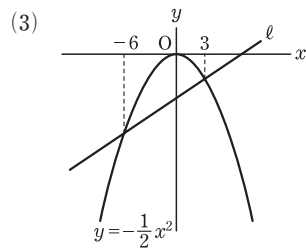
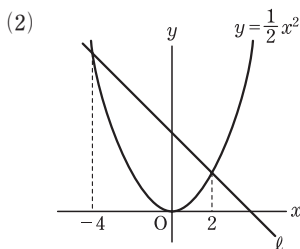
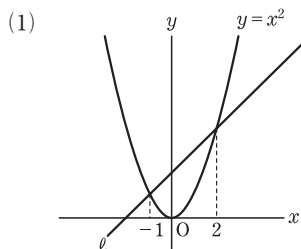
□ Ex.137 □ 右の図で、四角形 OACB が平行四辺形となるとき、点 B の座標を求めなさい。そのとき、点 D を通り、平行四辺形 OACB の面積を2等分する直線 ℓ の式を求めなさい。



練習問題

1 次の図で、直線 ℓ の式を求めなさい。

例題 103

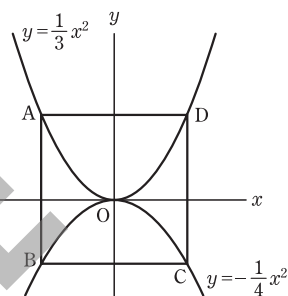


2 右の図で、四角形 ABCD が長方形となるときの、次の問いに答えなさい。

例題 104

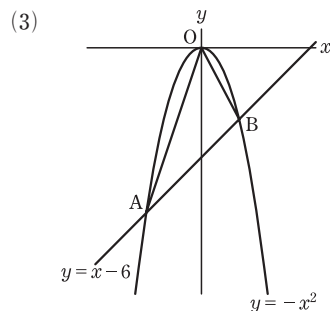
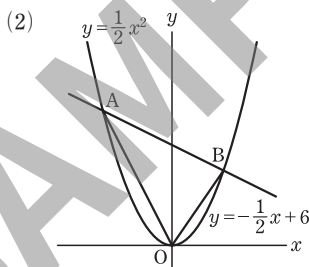
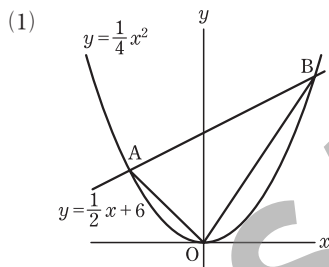
(1) 点 D の x 座標を t とするとき、点 B の座標を t を用いて表しなさい。

(2) 四角形 ABCD が正方形となるときの、正方形の 1 辺の長さを求めなさい。



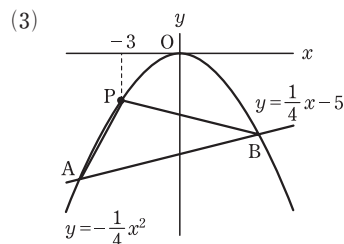
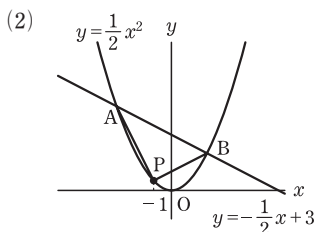
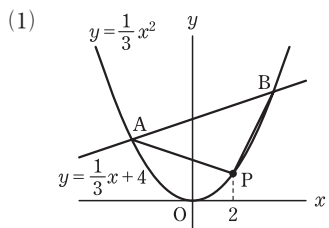
3 次の図で、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

例題 105



4 次の図で、 $\triangle PAB$ の面積を求めなさい。

例題 106

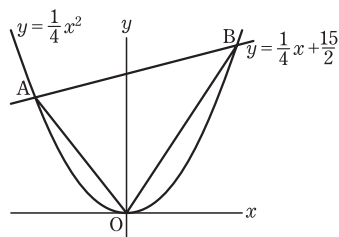


5 右の図について、次の問いに答えなさい。

例題 107

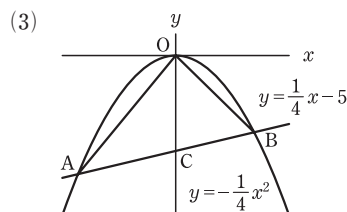
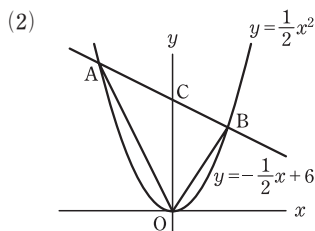
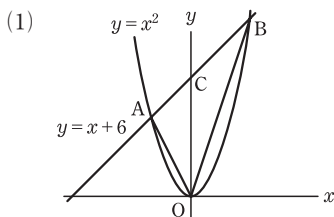
(1) 原点を通り、 $\triangle OAB$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

(2) 点 B を通り、 $\triangle OAB$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



6 次の図で、点Cを通り、 $\triangle OAB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。

例題 108



7 次の放物線と直線との交点の座標を求めなさい。

例題 109

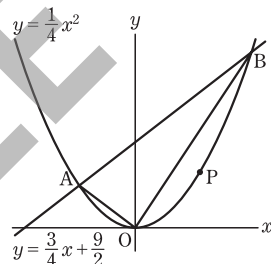
(1) $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$

(2) $y = -\frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{2}x - 20$

(3) $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x - 6$

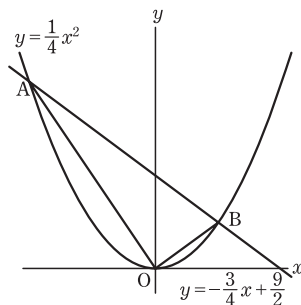
8 右の図のように、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と直線 $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$ が2点 A, B で交わっている。放物線上の2点 O, B の間に $\triangle AOB$ の面積と $\triangle APB$ の面積が等しくなるような点 P をとるとき、P の座標を求めなさい。

例題 110



9 右の図のように、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と直線 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$ が2点 A, B で交わっている。放物線上に $\triangle AOB$ の面積と $\triangle APB$ の面積が等しくなるような点 P をとるとき、P の座標をすべて求めなさい。

例題 111

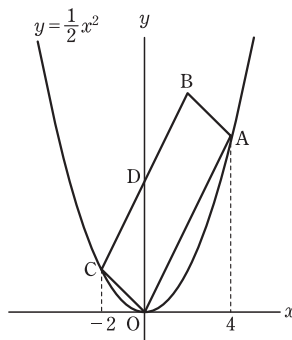


10 右の図で、四角形 OABC が平行四辺形となると、次の問いに答えなさい。

例題 112

(1) 点 B の座標を求めなさい。

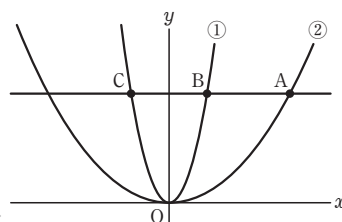
(2) 点 D を通り、平行四辺形 OABC の面積を2等分する直線の式を求めなさい。



実力問題

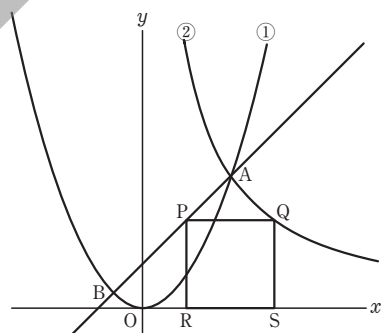
- 1** 放物線 $y=ax^2$ 上に、3点 A, B, C がある。点 A の x 座標は点 B の x 座標より 3 小さく、点 C の x 座標は点 B の x 座標より 2 大きい。また、直線 AB の傾きは 8、直線 BC の傾きは -2 である。 a の値と点 B の座標を求めなさい。
 〈同志社国際高〉

- 2** 右の図のように関数 $y=x^2$ ……①、 $y=ax^2(0<a<1)$ ……②のグラフがある。②のグラフ上の点 A(4, $16a$) を通り、 x 軸に平行な直線と①のグラフとの交点を点 A に近いほうから B, C とする。次の各問いに答えなさい。
 〈初芝富田林高〉



- (1) 点 C の x 座標が -1 のとき、直線 AO の式を求めなさい。
- (2) $BC=4$ のとき、 a の値を求めなさい。
- (3) $AB=BC$ のとき、 a の値を求めなさい。

- 3** 右の図において、点 A は放物線 $y=ax^2$ ……①と双曲線 $xy=54(x>0)$ ……②の交点で、点 B は①上にある。2点 A, B の x 座標はそれぞれ 6, -2 である。このとき、次の問いに答えなさい。
 〈立命館守山高〉



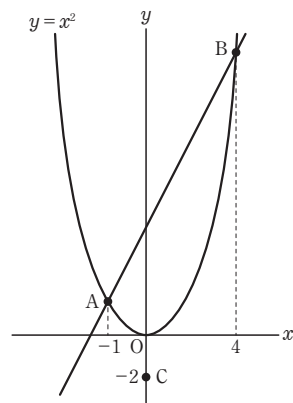
- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 直線 AB の式を求めなさい。
- (3) 線分 AB 上に点 P、②上に点 Q をとり、点 P を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点を R、点 Q を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点を S とする。四角形 PRSQ が正方形のとき、点 P の座標を求めなさい。

- 4** 右の図のように関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、点 A, B の x 座標はそれぞれ -1 , 4 である。また、 y 軸上に y 座標が -2 である点 C とする。

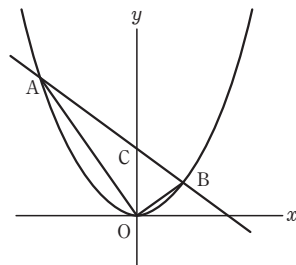
次の問いに答えなさい。

〈関大第一高〉

- (1) 直線 AB の式を求めなさい。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。
- (3) 点 C を通る直線 ℓ が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するとき、直線 ℓ の式を求めなさい。



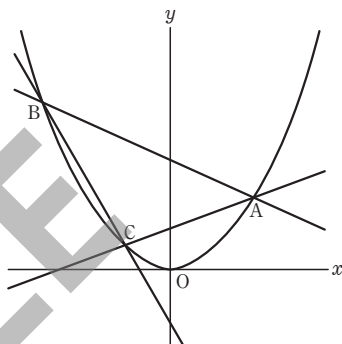
- 5** 右の図のように、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上に x 座標が、それぞれ -3 、 2 である点 A 、 B があり、直線 AB と y 軸との交点を点 C とする。
このとき、次の問いに答えなさい。



〈滝川高〉

- (1) 直線 AB の式を求めなさい。
- (2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。
- (3) 点 C を通る直線が $\triangle OAB$ の面積を二等分するとき、この直線の傾きを求めなさい。
- (4) この放物線上に、 $\triangle OAB = \triangle PAB$ となるような、原点 O と異なる点 P の座標をすべて求めなさい。

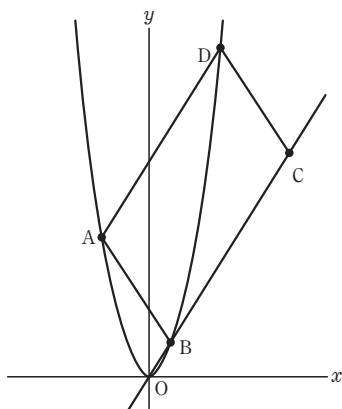
- 6** 図のように、放物線 $y = ax^2$ 上に3点 A 、 B 、 C がある。 A 、 B の x 座標はそれぞれ 4 、 -6 で、直線 AB の傾きは $-\frac{1}{2}$ である。
また、直線 AC は点 $(-4, 0)$ を通る。



〈西南学院高〉

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 点 C の座標を求めなさい。
- (3) 放物線上に x 座標が t ($t > 0$) である点 P をとる。 $\triangle ABP$ と $\triangle ABC$ の面積が等しくなるとき、 t の値を求めなさい。

- 7** 右の図のように、関数 $y = ax^2$ ……①のグラフ上に、2点 A 、 B があり、点 A の座標は $(-2, 6)$ 、点 B の x 座標は 1 である。
原点 O を通る直線 OB 上に点 C をとり、関数①のグラフ上に点 D をとる。

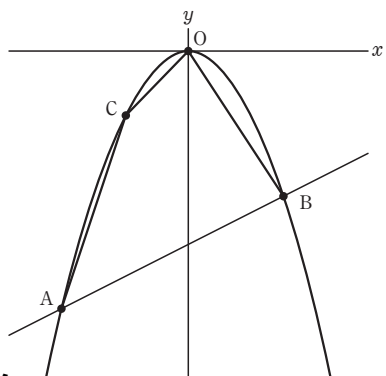


四角形 $ABCD$ が平行四辺形であるとき、次の各問いに答えなさい。

〈国立高専〉

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 直線 AB の式を求めなさい。
- (3) 点 C の座標を求めなさい。

- 8** 図のように、放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上に3点 A 、 B 、 C がある。
点 A の x 座標は負で、 y 座標は -8 、直線 AB の切片は -6 です。また、点 C の x 座標は -2 である。



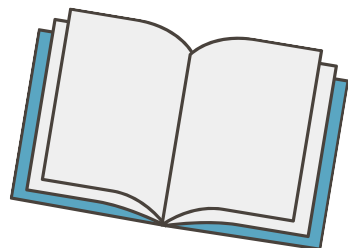
〈四天王寺高〉

- (1) 点 B の x 座標を求めなさい。
- (2) 直線 BC の傾きを求めなさい。
- (3) 直線 AB 上に x 座標が正の点 P がある。四角形 $OCAB$ の面積と $\triangle CAP$ の面積が等しくなるとき、点 P の x 座標を求めなさい。

紙面サンプルはここまでです。
弊社教材サンプルをご覧いただき
ありがとうございます。

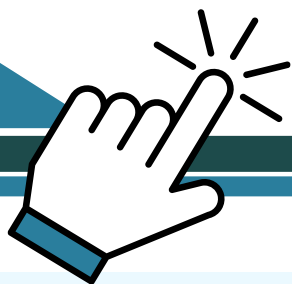
塾・学校の先生限定サイト

Bunri Teachers' Site へのご登録で、
全ページ版をご覧いただけます。



登録無料で、他にも便利な機能がたくさん！
ぜひお役立て下さい。

Bunri Teachers' Site
会員登録はこちら



※ご登録には弊社発行の招待コードが必要です。

教材サポート

単元テスト、指導用資料、
学習サポートアイテムなど
指導をサポートするコンテンツ



最新の教育情報

社会時事問題、高校入試分析、
教科書採択情報など最新の
教育に関する情報をお届け



各種教材やテストの お問い合わせ・お申込み

生徒さま一人一人に合った教材・
テスト・デジタルコンテンツを
ご提案



※Bunri Teachers' Siteは、塾・学校の先生方のための情報サイトです。

ユーザー登録していただくことで、会員限定の詳細情報をご覧いただくことができます。
本サイトは一般の方のご利用をお断りしております。予めご了承ください。

お問い合わせフォーム

招待コード発行や教材の内容・ご購入方法等
お気軽にお問い合わせ下さい。

資料ご請求フォーム

弊社教材カタログ、教材やセミナーの
最新情報をお手元にお届けします！